UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
COLEGIADO DE MATEMÁTICA
Licenciatura em Matemática
UNIOESTE - *Campus* de Cascavel

GABRIELA DE MELO DEVENS
JOÃO ALFREDO SIMON SANTOS
JULIANA TEREZINHA DE OLIVEIRA MOURA
LEONARDO SALVADOR
PATRICIA FERREIRA SURI

RELATÓRIO DA DISCIPLINA DE METODOLOGIA E PRÁTICA DE ENSINO DE MATEMÁTICA:

ESTÁGIO SUPERVISIONADO I

PROMAT

CASCAVEL
2018

GABRIELA DE MELO DEVENS
JOÃO ALFREDO SIMON SANTOS
JULIANA TEREZINHA DE OLIVEIRA MOURA
LEONARDO SALVADOR
PATRICIA FERREIRA SURI

METODOLOGIA E PRÁTICA DE ENSINO DE MATEMÁTICA:
ESTÁGIO SUPERVISIONADO I
PROMAT

Relatório apresentado como requisito parcial para aprovação na disciplina de Metodologia e Estágio Supervisionado I.

Orientadoras: Prof. Ms. Naísa Camila Garcia Tosti
Prof. Ms. Pamela Gonçalves

CASCAVEL
2018

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Este Relatório de Estágio Supervisionado aborda as oportunidades e desafios enfrentados no período estagiado no projeto Promat do ano de 2018, no qual exercemos a prática docente, preparando e executando o referido projeto.

Por meio de relatos pessoais, análises e descrições das aulas, detalhamos como se deu o processo de ensino-aprendizagem pelas partes envolvidas no projeto, os alunos e nós, futuros professores. Apresentamos, todos os tipos de materiais usados durante os encontros, ressaltando exercícios e materiais manipuláveis que tiveram importância no decorrer do projeto.

Com a análise dos relatórios de aula é possível entender por quais situações, nós futuros professores passamos em sala de aula, além de perceber limitações e fatos que contribuíram para a nossa formação docente.

Durante dez sábados entre os meses de abril e julho, conduzimos esse projeto, com duração de dez aulas, totalizando 40 horas de prática em sala de aula. Ao final do mesmo, elaboramos esta pasta descrevendo e relatando tudo o que foi feito neste período.

2. PROMAT

O Promat, Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática tem como objetivo oferecer um curso preparatório na área matemática, visando à permanência dos alunos nos cursos de graduação nas diversas universidades do país.

As aulas do Promat têm duração de três horas e quarenta minutos, com intervalo de vinte minutos, e acontecem aos sábados pela manhã, com início às 8h, e, nesse primeiro semestre, contou com um cronograma de dez encontros.

O projeto é desenvolvido pelo colegiado do curso de licenciatura em matemática e visa atender alunos da rede pública estadual de ensino que buscam acesso aos cursos superiores. Podem particiar preferencialmente alunos matriculados na 3ª série do ensino médio sendo possível atender alunos da 2ª e 1ª série ou egressos, caso haja vagas remanescentes.

As aulas são administradas pelos alunos estagiários do curso de licenciatura em matemática, sob a supervisão e orientação dos professores do colegiado de licenciatura em matemática.

O foco de estudos que o Promat aborda são os principais para os alunos realizarem provas tais como o Exame Nacional do Ensino Médio, o ENEM, e demais vestibulares, pois o projeto atua como um curso preparatório de matemática.

2.1 OPÇÃO TEÓRICA E METODOLÓGICA ESCOLHIDA PARA O DESENVOLVIMENTO DAS AULAS.

Nosso grupo optou por não fixar uma única metodologia para trabalhar, assim tínhamos um leque de possibilidades, de como abordar e proceder com cada aula. Durante os dez sábados, abordamos a metodologia de aula tradicional, resolução de problemas e investigação matemática.

Houve vezes em que, para introdução do conteúdo, realizamos experimentos para indagar a curiosidade dos alunos. Houve aulas em que explicamos o conteúdo teoricamente para depois aplicarmos exercícios sobre o assunto. Houve momentos em que deixamos que os alunos resolvessem os exercícios sem explicação, para que eles percebessem a necessidade de aprender um novo conteúdo, pois o seu conhecimento prévio era insuficiente.

Quando optamos por iniciar a aula a partir de um exercício sem dar muitos encaminhamentos, aplicamos a metodologia da resolução de problemas, muito defendida e apresentada por Polya. Este método considerado heurístico, tem sido muito defendido nos dias atuais e vem ganhando destaque nas metodológicas aulas de matemática, decidimos por colocar em prática esta ideia, e analisar como nossos alunos se saiam perante a esse desafio. Uma marca importante desta metodologia é a de que o aluno geralmente sabe onde precisa chegar, e sabe que terá uma resposta concreta, mas ele precisa traçar um caminho que não é aparentemente óbvio para alcançar esta resposta, esse é o diferencial deste método, e que o torna tão especial na visão de Polya.

Utilizando-se de problemas geradores, implementamos também a teoria da investigação matemática, esta foi apresentada através dos olhos de Ponte, Brocardo e Oliveira, uma teoria muito bem desenvolvida e que trouxe bons resultados para a pesquisa matemática na área da didática. Pondo em prática o uso desta teoria, nos fazemos valer da parte em que devemos observar e analisar os caminhos tomados pelos estudantes até a obtenção das respostas desejadas. Em um cenário ideal trabalhando-se com essa metodologia não temos como objetivo chegar em uma resposta única, mas sim em ideias e projeções, porém em nossas aulas tínhamos objetivos concretos a serem alcançados, pelo curto espaço de tempo.

Essas considerações ressaltam ainda mais que as teorias de investigação e resolução de problemas na mtemática, estão totalmente interligadas, e mostra que é possível traçar uma ponte entre as duas metodologias, aperfeiçoando ainda mais as aulas de matemática.

Enfim, diríamos que tivemos uma metodologia bem heterogênea para abordar nossas aulas, e acreditamos que foi um diferencial em nosso grupo esse tipo de pensamento.

2.2 CRONOGRAMA

Encontro	Data	Conteúdo
1	28/04	Razões/proporções
2	05/05	Regras de três
3	12/05	Polinômios
4	19/05	Equações
5	09/06	Conjuntos Numéricos Introdução Funções
6	16/06	Função Afim
7	23/06	Função Quadrática
8	30/06	Geometria
9	07/07	Geometria
10	14/07	Geometria

2.3 MÓDULO 1 – RAZÃO, PROPORÇÃO, REGRA DE TRÊS, POLINOMIOS E EQUAÇÕES

2.3.1 Plano de Aula do dia 28/04/2018

1º ENCONTRO

Público-Alvo:

Alunos do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

Objetivo Geral:

Compreender os conceitos de razão e proporção, utilizando a metodologia de resolução de problemas.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com Razão e Proporção, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Compreender o conceito de razão e proporção;
- Entender a porcentagem como um caso particular de razão;
- Identificar problemas de razão e proporção;
- Resolver situações que envolvam o conteúdo.

Conteúdo: Razão e Proporção.

Recursos Didáticos: Quadro, giz, projetor, lista de exercícios.

Dinâmica de apresentação:

Individualmente, cada aluno irá se apresentar, dizendo seu nome, idade, de onde veio (cidade/colégio), qual curso deseja fazer e o que espera com o PROMAT.

Encaminhamento metodológico:

1. Organização, dinâmica de apresentação e apresentação do PROMAT (30 min)

Organizaremos a sala de aula formando grupos de quatro pessoas com as carteiras. Iniciaremos com a apresentação dos alunos através da dinâmica de apresentação descrita acima, logo após realizaremos uma breve explicação sobre o PROMAT e sobre os conteúdos que trabalharemos.

2. <u>Exercício de introdução e formalização do conteúdo (Razão e Proporção) (30 min)</u>

Iniciaremos a aula propriamente dita, com o exercício a seguir. Nosso objetivo será analisar quais conteúdos prévios nossos alunos possuem, portanto, deixaremos que os alunos resolvam o exercício com o mínimo de interferência, respondendo de acordo com o que julgarem correto.

EXERCÍCIO DE INTRODUÇÃO

(ENEM – PPL) O quadro apresenta dados sobre viagens distintas, realizadas com o mesmo veículo, por diferentes motoristas. Em cada viagem, o veículo foi abastecido com combustível de um preço diferente e trafegou com uma velocidade média distinta.

Motorista	Custo por litro de combustível (R$)	Distância percorrida (Km)	Velocidade Média (Km/h)
1	2,80	400	84
2	2,89	432	77
3	2,65	410	86
4	2,75	415	74
5	2,90	405	72

Tabela 1: Motorista/R$/Km/Km/h. Fonte: INEP.

Sabe-se que esse veículo tem um rendimento de 15 km por litro de combustível se trafegar com velocidade média abaixo de 75 km/h. Já se trafegar com velocidade média entre 75 km/h e 80 km/h, o rendimento será de 16 km por litro de combustível. Trafegando com velocidade média entre 81 km/h e 85 km/h, o rendimento será de 12 km por litro de combustível e, acima dessa velocidade média, o rendimento cairá para 10 km por litro de combustível.

Qual foi o motorista que realizou a viagem que teve o menor custo com combustível?

Em seguida, faremos a correção do exercício no quadro, com o auxílio dos alunos presentes, fazendo aos estudantes questionamentos sobre suas resoluções, destacando o porquê, da solução ter sido realizada da maneira apresentada por eles. A partir disso, questionaremos os alunos sobre seus conhecimentos a respeito dos conceitos razão e proporção.

Logo após, formalizaremos os conceitos de razão e proporção.

RAZÃO

Dados dois números *a* e *b*, com *b* diferente de zero, chamamos de **razão de a para b,** ou simplesmente **razão entre a e b,** nessa ordem, ao quociente *a/b* que também pode ser indicado por a: b.

Exemplos de razão:

- Velocidade média: razão entre distância e tempo;
- Densidade de um corpo: razão entre massa do corpo e volume que ele ocupa;
- Densidade demográfica: razão entre número de pessoas e área ocupada;
- Escala: razão entre a medida real e a medida do desenho.

PROPORÇÃO

Proporção é a igualdade entre duas ou mais razões. Uma proporção é representada por *a:b=c:d* e lê-se "*a* está para *b* assim como *c* está para *d*". *a* e *d* são os **extremos**; *b* e *c* são os **meios**.

Os números a, b, c, d chamam-se termos da proporção e devem ser racionais não nulos.

PROPRIEDADE FUNDAMENTAL

Consideremos a proporção a/b=c/d, com b e d diferentes de zero. Vale então:

Em qualquer proporção a/b= c/d, verifica-se que: a.d=b.c

Isto é, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos.

A partir desta propriedade podemos definir duas relações fundamentais:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \longleftrightarrow \frac{a+c}{d+b} = \frac{a}{b} \textit{ ou } \frac{a+c}{d+b} = \frac{c}{b}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \longleftrightarrow \frac{a-c}{d-b} = \frac{a}{b} \ \ ou \ \ \frac{a-c}{d-b} = \frac{c}{b}$$

3. Resolução de exercícios (Razão e Proporção) (20 mim)

Exercícios

1 - (ENEM 2015) Um pesquisador, ao explorar uma floresta, fotografou uma caneta de 16,8 cm de comprimento ao lado de uma pegada. O comprimento da caneta (c), a largura (L) e o comprimento (C) da pegada, na fotografia, estão indicados no esquema.

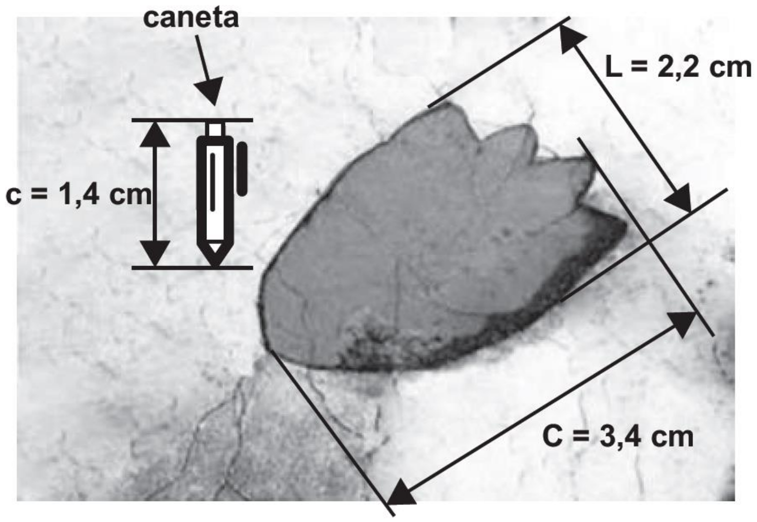


Figura 1: Pegada/caneta. Fonte: INEP.

Qual a largura e o comprimento reais da pegada, em cm?

2 - (ENEM 2013) Um dos grandes problemas enfrentados nas rodovias brasileiras é o excesso de carga transportada pelos caminhões. Dimensionado para o tráfego dentro dos limites legais de carga, o piso das estradas se deteriora com o peso excessivo dos caminhões. Além disso, o excesso de carga interfere na capacidade de frenagem e no funcionamento da suspensão do veículo, causas frequentes de acidentes.

Ciente dessa responsabilidade e com base na experiência adquirida com pesagens, um caminhoneiro sabe que seu caminhão pode carregar, no máximo, 1500 telhas ou 1200 tijolos.

Considerando esse caminhão carregado com 900 telhas, quantos tijolos, no máximo, podem ser acrescentados à carga de modo a não ultrapassar a carga máxima do caminhão?

3 - (ENEM 2016) O Levantamento Rápido do Índice de Infestação por *Aedes aegypti*, o LIRAa consiste num mapeamento da infestação do mosquito *Aedes aegypti*. O LIRAa é dado pelo percentual do número de imóveis com focos do mosquito, entre os escolhidos de uma

região em avaliação. O serviço de vigilância sanitária de um município, no mês de outubro do ano corrente, analisou o LIRAa de cinco bairros que apresentaram o maior índice de infestação no ano anterior. Os dados obtidos para cada bairro foram:

I. 14 imóveis com focos de mosquito em 400 imóveis no bairro;

II. 6 imóveis com focos de mosquito em 500 imóveis no bairro;

III. 13 imóveis com focos de mosquito em 520 imóveis no bairro;

IV. 9 imóveis com focos de mosquito em 360 imóveis no bairro;

V. 15 imóveis com focos de mosquito em 500 imóveis no bairro.

O setor de dedetização do município definiu que o direcionamento das ações de controle iniciarão pelo bairro que apresentou o maior índice do LIRAa.

Em qual bairro as ações de controle iniciarão?

4. Correção dos exercícios propostos (Razão e Proporção) (20 min)

Parte destinada à correção dos exercícios propostos anteriormente.

5. Intervalo

6. Formalização de conteúdo (Porcentagem) (10 min)

PORCENTAGEM

É uma razão que compara grandezas de mesma natureza e representa a parte considerada em um total de 100 partes iguais. Torna mais fácil a comparação entre cifras muito grandes ou muito pequenas, permitindo a organização em gráficos, tabelas, etc. Se dissermos "percentual de", já está implícito que devemos calcular a porcentagem de algo. É representada pelo símbolo "%".

7. Resolução de Exercícios (Porcentagem) (20 mim)

1 - (ENEM 2016) Um paciente necessita de reidratação endovenosa feita por meio de cinco frascos de soro durante 24 h. Cada frasco tem um volume de 800 ml de soro. Nas primeiras quatro horas deverá receber 40% do total a ser aplicado. Cada mililitro de soro corresponde a 12 gotas.

Qual o número de gotas por minuto que o paciente deverá receber após as quatro primeiras horas?

2 - Em uma prova de conclusão de curso, 40 questões eram de Português e 50 de Matemática. Ao conferir a prova, Mateus verificou que acertou 90% de todas as questões. Sabendo que ele acertou 80% das questões de Português, que percentual das questões de Matemática ele acertou?

3 - (9° OBMEP- 2013) Dois quadrados de papel se sobrepõem como na figura. A região não sobreposta do quadrado menor corresponde a 52% de sua área e a região não sobreposta do quadrado maior corresponde a 73% de sua área. Qual é a razão entre o lado do quadrado menor e o lado do quadrado maior?

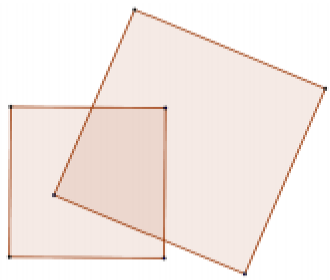


Figura 2: Quadrados sobrepostos. Fonte: OBMEP.

8. <u>Correção dos exercícios propostos (Porcentagem) (20 mim)</u>

Parte destinada à correção dos exercícios propostos anteriormente.

9. <u>Exercícios de Fixação (Todo o conteúdo da aula) (30 mim)</u>

Exercícios do material do aluno.

10. <u>Esclarecimento de dúvidas recorrentes (10 min)</u>

Parte destinada a esclarecimento de eventuais dúvidas dos alunos sobre qualquer parte da aula.

11. <u>Encerramento (10 mim)</u>

Parte destinada ao encerramento da aula atual e prévia da aula seguinte.

<u>Avaliação:</u>

A avaliação se desenvolverá no decorrer da aula, por meio da observação do desempenho e entendimento do aluno com a aplicação dos exercícios.

Referências:

GUELLI, Oscar. **Matemática:** uma aventura do pensamento. São Paulo: Ática, 1998.

BARROSO, Juliane M. **Projeto Araribá:** Matemática. São Paulo: Moderna, 2006.

IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel; DEGENSZAJN, David. **Fundamentos da matemática elementar,** volume 11: 1° Ed, editora atual, 2004.

CHAVANTE, E. **Matemática**, Coleção Convergências. São Paulo: SM, 2015.

EXERCICIOS DE RAZÃO E PROPORÇÃO ENEM. Questões de Matemática Razão e Proporção. Disponível em: https://enem.estuda.com/questoes/?cat=3&subcat=489. Acesso em: 04 Abr 2018.

RAZÃO E PROPORÇÃO OBMEP. **Razões e Proporções**. Disponível em: https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=57. Acesso em: 03 Abr 2018.

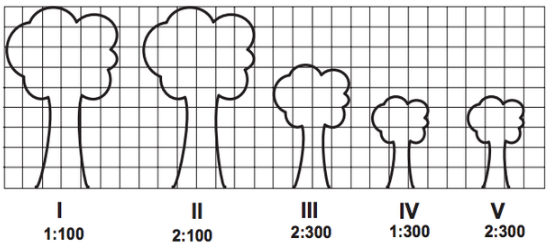
2.3.1.1 Material do Aluno

MATERIAL DO ALUNO 1º ENCONTRO

1 - (ENEM 2011) Sabe-se que a distância real, em linha reta, de uma cidade A, localizada no estado de São Paulo, a uma cidade B, localizada no estado de Alagoas, é igual a 2 000 km. Um estudante, ao analisar um mapa, verificou com sua régua que a distância entre essas duas cidades, A e B, era 8 cm. Os dados nos indicam que o mapa observado pelo estudante está na escala de?

2 - (ENEM 2012) Um biólogo mediu a altura de cinco árvores distintas e representou-as em uma mesma malha quadriculada, utilizando escalas diferentes, conforme indicações na figura a seguir.

Qual árvore apresenta a maior altura real?



3 - (Enem 2016) O percentual da população brasileira conectada à internet aumentou nos anos de 2007 a 2011. Conforme dados do Grupo Ipsos, essa tendência de crescimento é mostrada no gráfico.

Suponha que foi mantida, para os anos seguintes, a mesma taxa de crescimento registrada no período 2007-2011. Qual a estimativa para o percentual de brasileiros conectados à internet em 2013?

4 - (OBMEP) Em determinada fase do desenvolvimento de uma criança existe, entre ela e seu pai, uma semelhança matemática, entre várias grandezas como altura, comprimento das pernas e massa corpórea (que corresponde matematicamente ao volume de um corpo). Sabendo que as alturas do pai e da criança são, respectivamente, 1,80 m e 1,38 m e que o pai tem 75 kg de massa corpórea, qual o valor que se pode concluir aproximadamente para a massa corpórea dessa criança, em kg?

5 - (ENEM 2014) O condomínio de um edifício permite que cada proprietário de apartamento construa um armário em sua vaga de garagem. O projeto da garagem, na escala 1: 100, foi disponibilizado aos interessados já com as especificações das dimensões do armário, que deveria ter o formato de um paralelepípedo retângulo reto, com dimensões, no projeto, iguais a 3cm, 1cm e 2cm. Qual o volume real do armário, em centímetros cúbicos?

6 - (ENEM 2016) No início de janeiro de um determinado ano, uma família decidiu economizar para as férias de julho daquele ano, guardando uma quantia por mês. Eles decidiram que, em janeiro, guardariam R$ 300,00 e, a partir de fevereiro, guardariam, a cada mês, 20% a mais do que no mês anterior. Qual foi o total economizado (em real) no primeiro semestre do ano, abandonando, por arredondamento, possíveis casas decimais nesse resultado?

7 - (ESPM 2016) Duas impressoras iguais imprimem 5 000 páginas em 30 minutos. Se elas forem substituídas por uma só impressora 20% mais eficiente que cada uma das anteriores, 3 600 páginas seriam impressas em quanto tempo?

8 - (OBMEP) Considere 3 trabalhadores. O segundo e o terceiro, juntos, podem completar um trabalho em 12 dias. O primeiro e o terceiro, juntos, podem fazer o mesmo trabalho em 10 dias, enquanto que o primeiro e o segundo, juntos, podem fazê-lo em 15 dias.
Em quantos dias, os três juntos podem fazer o mesmo trabalho?

9 - (FATEC 2016) Adaptado. Pesquisas realizadas pelo IBGE apontam que a carga horária de trabalho das mulheres na última década aumentou em mais de uma hora. Em 2004, as mulheres trabalhavam quatro horas a mais que os homens, por semana, quando se soma o trabalho realizado fora de casa e os afazeres domésticos. Em 2014, a dupla jornada feminina passou a ter cinco horas a mais que a dupla jornada masculina, segundo a Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios (PNAD), que reúne informações de mais de 150 mil lares.

	TEMPO DE TRABALHO SEMANAL			
	2004		2014	
FORMA DE TRABALHO	HOMENS	MULHERES	HOMENS	MULHERES
FORA DE CASA	44 h	35 h 30 min	41h 36 min	35 h 30 min
AFAZERES DOMESTICOS	10 h	22 h 18 min	10 h	21h 12 min

Qual a porcentagem aproximada, em 2004, do total semanal de horas trabalhadas pelas mulheres (fora de casa e com afazeres domésticos) em relação ao total de horas de uma semana?

2.3.1.2 Relato de Aula

No dia 28 de abril de 2018, o grupo de alunos que cursam a disciplina de metodologia de estágio supervisionado I, composto pelos estagiários(as): Gabriela de Melo Devens, João Alfredo Simon Santos, Juliana Terezinha de Oliveira Moura, Leonardo Salvador e Patricia Ferreira Suri, encontrou-se nas dependências da Universidade Estadual do Oeste do Paraná (UNIOESTE), para dar início as atividades do PROMAT.

Antes de iniciarmos as atividades do primeiro encontro, preparou-se a sala de aula para receber os estudantes, organizamos as carteiras de modo que fossem criados grupos para quatro pessoas. Em seguida aguardamos a chegada dos estudantes, até que as 8 horas da manhã iniciamos os trabalhos do primeiro encontro, estavam presentes 30 alunos para a aula. Inicialmente nos apresentamos, falando nossos nomes e dando uma breve explicação de como seriam as nossas aulas, em seguida foi a vez dos alunos se apresentarem, dizendo de onde vinham e qual curso gostariam de fazer futuramente, este ponto já tivemos a primeira surpresa da manhã, a dinâmica de apresentação terminou com um tempo bem abaixo do esperado por nós. Feito isso prosseguimos com as demais explicações sobre o PROMAT e em seguida começamos com os procedimentos matemáticos que estavam previstos para a primeira aula.

A nossa aula se deu início a partir de um exercício, este tinha função de introduzir o conteúdo a ser trabalhado na aula, a saber: razão e proporção, mas sem que os alunos soubessem de qual conteúdo se tratava. Outro problema surgiu neste momento, os estudantes pareceram não entender o exercício e apresentavam muitas dificuldades para chegar a solução do mesmo. Decidimos então, passar de grupo em grupo orientando os alunos até eles conseguirem chegar em uma resposta para o exercício. Por esse motivo, esta parte da aula demorou mais tempo que o esperado, fato esse que nos obrigou a mudar um pouco os planos do nosso primeiro encontro.

Após este primeiro momento para busca de uma resolução ao exercício proposto fomos ao quadro, com intuito de formalizar a resolução do problema e explicitar pela primeira vez o conteúdo de razão e proporção, que era o tema de abordagem da nossa primeira aula. Esta parte da aula ocorreu como o planejado, sem nenhum problema ou interrupção, e os estudantes por sua vez pareceram entender bem o conceito que vinha sendo-lhes apresentado.

Dando seguimento a aula, tivemos que sanar o problema do atraso que se deu pela demora inesperada na solução do nosso problema gerador. Estava previsto para este momento um tempo breve para resolução de três exercícios de fixação, como estávamos atrasados em relação ao nosso planejamento, decidimos por resolver esses exercícios juntamente com os alunos no quadro. A resolução dos dois problemas iniciais foi aparentemente tranquila, e os alunos demonstraram entender os procedimentos usados, já no terceiro exercício tivemos um problema, devido a um erro de interpretação advindo de nossa parte, a resolução do problema foi feita de forma equivocada e um dos alunos logo percebeu e nos apontou o erro, atentando-se a esse problema a resolução foi refeita com ajuda dos estudantes. Decidimos ainda, que a fim de tirar toda e eventual dúvida, iriamos resolver esse exercício novamente na próxima aula.

Em meio as explicações e resolução dos exercícios, um dos alunos alegou ter bastante dificuldade em trabalhar com números com vírgula em operações de divisão e multiplicação. A partir disso, deu-se atenção individual para este aluno, buscando assim fazê-lo compreender como funcionam os procedimentos com a vírgula durante as operações acima supracitadas.

Outro ponto inusitado ocorreu durante a resolução de um exercício no quadro, ao efetuar uma divisão um dos estagiários efetuou algumas operações algébricas que levou a resolução do exercício até uma dízima periódica, e vê nesse momento a chance de abordar um tópico que não constava no plano de aula, que é a de notação para dízimas periódicas, após a explicação sobre a notação a ser usada, alguns dos alunos se viram surpresos, alegando não lembrar desse tipo de notação.

Após estes procedimentos, entregamos aos estudantes uma lista de exercícios, a qual os alunos deveriam iniciar a resolução em sala e terminar em casa, pois o tempo disponibilizado era insuficiente. Durante a resolução dos exercícios auxiliamos os alunos em eventuais dúvidas, nesse ponto da aula percebemos tamanha dificuldade que os alunos tinham nas operações matemáticas básicas em um contexto geral. Também foi perceptível aqui a grande dificuldade que se tem ao dar aulas em classes tão heterogêneas de alunos, pois devemos sempre conciliar o aprendizado de forma que os alunos mais avançados estejam em evolução constante e sendo expostos a novos conceitos, mas sempre buscando resgatar aqueles que por sua vez tem mais dificuldade, sem deixar estes desmotivados a ponto de não terem mais interesse em buscar o conhecimento.

Depois de ajudar vários alunos individualmente durante a resolução da lista complementar, voltamos a chamar a atenção dos alunos ao quadro pela última vez nesta aula, relembramos aos estudantes os principais tópicos trabalhados na aula vigente e deixamos claros quais são os pontos mais importantes do encontro, feito isso foi dada uma breve introdução sobre a próxima aula, relatando a classe o conteúdo a ser abordado, a saber: Regra de três ou proporcionalidade. Por fim agradecemos a presença de todos deixando o convite a eles sobre os próximos encontros do PROMAT.

2.3.2 Plano de aula do dia 05/05/2018

<u>2º ENCONTRO</u>

Público-Alvo:

Alunos do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

Objetivo Geral:

Compreender a Regra de três como um método para resolver problemas envolvendo grandezas.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com Regra de Três, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Relacionar conteúdos de Regra de Três e Razão/Proporção;
- Identificar e resolver questões de Regra de Três simples e composta;
- Trabalhar com métodos que ajudem na resolução de exercícios envolvendo o conteúdo;

Conteúdo: Proporcionalidade **(**Regra de Três).

Recursos Didáticos: Quadro, giz, lista de exercícios.

Encaminhamento metodológico:

1. Relacionar os conteúdos de Razão/Proporção e Regra de Três (Exercício já aplicado), relembrando o método de resolução da aula anterior (25 min)

Iniciaremos a aula retomando o exercício 1 do material do aluno, que já foi aplicado na aula anterior. O objetivo agora é mostrar outra maneira de resolver o mesmo exercício utilizando a Regra de Três.

2. Exercício de fixação (15 min)

Pediremos para os alunos resolverem o exercício 2 do material do aluno, com o objetivo de despertar possíveis dúvidas, o mesmo será corrigido no quadro.

3. Regra de três simples com grandezas diretamente e inversamente proporcionais (25 min)

Em seguida, propomos a resolução do exercício abaixo. Tal exercício aborda o conteúdo de regra de três simples com grandezas inversamente proporcionais, os alunos o resolverão sem formalização. O objetivo é despertar nos alunos a necessidade de aprender este novo conteúdo.

EXERCÍCIO: Um certo volume de medicação demora 6 horas para ser ministrado em um gotejamento de 12 gotas por minuto. Se o número de gotas por minuto fosse de 18 gotas, quanto tempo teria demorado a aplicação desta mesma medicação?

4. Formalização das grandezas diretamente e inversamente proporcionais. (20 min)

Posteriormente, corrigiremos o exercício no quadro e formalizaremos os novos conceitos da seguinte maneira:

GRANDEZAS DIRETAMENTE E INVERSAMENTE PROPORCIONAIS

Proporção direta

Duas grandezas são diretamente proporcionais quando aumentando uma delas em uma determinada razão, a outra aumenta nesta mesma razão, o mesmo ocorre quando uma delas diminui.

Exemplo: Horas trabalhadas e salário recebido. (em alguns casos), lado e perímetro de um quadrado. (esse é em todos os casos...)

Proporção inversa

Duas grandezas são inversamente proporcionais quando aumentando uma delas em uma determinada razão, a outra diminui na mesma razão.

Exemplo: Velocidade média e tempo de viagem.

DIVISÃO EM PARTES PROPORCIONAIS

Divisão proporcional é uma forma de divisão na qual determinam-se valores que, divididos por quocientes previamente determinados, mantêm-se uma razão que não tem variação. A divisão proporcional pode ser: direta e inversa.

Divisão diretamente proporcional

Exemplo:

Duas pessoas A e B trabalham na fabricação de um mesmo objeto, sendo que A trabalhou 6 horas e B 5 horas. O objeto foi vendido por R$ 660,00. Dividir o valor em partes diretamente proporcionais ao trabalho de cada um.

Divisão inversamente proporcional

Exemplo:

Duas pessoas A e B trabalharam na fabricação de um produto que foi vendido por R$160,00. Se A chegou atrasado ao trabalho 3 dias e B 5 dias. Então dívida R$ 160,000 em partes inversamente proporcionais à quantidade de dias atrasados.

5. Exercício de fixação (15 min)

Pediremos para os alunos resolverem o exercício 3 do material do aluno, que será corrigido no quadro posteriormente.

6. Intervalo

7. Regra de três composta (30 min)

Vamos propor o exercício abaixo, que para resolução utiliza regra de composta, sem formalização. O objetivo, mais uma vez, é despertar nos alunos a necessidade de aprender este novo conteúdo e fazer com que eles percebam que o conteúdo que possuem até este momento é insuficiente.

EXERCÍCIO: Um texto ocupa 6 páginas de 45 linhas cada uma, com 80 letras (ou espaços) em cada linha. Para torná-lo mais legível, diminui-se para 30 o número de linhas por página e para 40 o número de letras (ou espaços) por linha. Considerando as novas condições, determine o número de páginas ocupadas.

Posteriormente, realizaremos a correção deste, com o auxilio dos alunos.

8. Exercício de Fixação (20 min)

Pediremos para os alunos resolverem o exercício 4 do material do aluno, que será corrigido no quadro posteriormente, já que ele apresenta boas possibilidades para abordagem desse conteúdo, pois é um tanto longo e apresenta várias informações e possibilidades de resolução.

9. <u>Resolução de Exercícios material do aluno (35 min)</u>

Solicitaremos aos alunos que resolvam os outros exercícios do material do aluno, para podermos verificar se compreenderam o conteúdo e as formas de resolução.

10. <u>Encerramento e despedida (15 min)</u>

Aqui, retomaremos os principais pontos da aula e daremos uma introdução da aula seguinte, que terá o foco em Polinômios. Iremos falar sobre os principais pontos e dar uma ideia superficial sobre o que vamos estudar.

<u>Avaliação:</u>

A avaliação será feita através da observação das resoluções de exercícios propostas no material do aluno.

<u>Referências:</u>

GUELLI, Oscar. **Matemática:** uma aventura do pensamento. São Paulo: Ática, 1998.

BARROSO, Juliane M. **Projeto Araribá:** Matemática. São Paulo: Moderna, 2006.

CHAVANTE, E. **Matemática**, Coleção Convergências. São Paulo: SM, 2015.

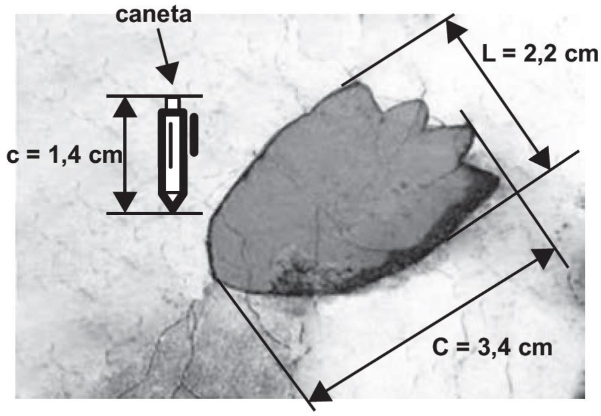
REGRA DE TRES. **Razões de Proporções**. Disponível em: https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=57&tipo=4. Acesso em: 11 Abr 2018.

QUESTÕES REGRA DE TRÊS ENEM. **Regra de três**. Disponível em: https://www.qconcursos.com/questoes-do-enem/disciplinas/matematica-matematica/aritmetica-e-problemas/regra-de-tres. Acesso em: 13 Abr 2018.

2.3.2.1 Material do Aluno

MATERIAL DO ALUNO 2º ENCONTRO

1 - (ENEM 2015) Um pesquisador, ao explorar uma floresta, fotografou uma caneta de 16,8 cm de comprimento ao lado de uma pegada. O comprimento da caneta (c), a largura (L) e o comprimento (C) da pegada, na fotografia, estão indicados no esquema.



Qual a largura e o comprimento reais da pegada, em cm?

2 - Um muro de 12 metros foi construído utilizando 2160 tijolos. Caso queira construir um muro de 30 metros nas mesmas condições do anterior, quantos tijolos serão necessários?

3 - Para fazer a digitalização de 30 páginas, um estagiário leva 28 minutos. Se o estagiário trabalhar durante suas 4 horas e 40 minutos de expediente com o dobro dessa velocidade de digitalização, nesse expediente de trabalho, quantas páginas ele será capaz de digitalizar?

4 - (ENEM 2016) Um banco de sangue recebe 450 mL de sangue de cada doador. Após separar o plasma sanguíneo das hemácias, o primeiro é armazenado em bolsas de 250 mL de capacidade. O banco de sangue aluga refrigeradores de uma empresa para estocagem das bolsas de plasma, segundo a sua necessidade. Cada refrigerador tem uma capacidade de estocagem de 50 bolsas. Ao longo de uma semana, 100 pessoas doaram sangue àquele banco. Admita que, de cada 60 mL de sangue, extraem-se 40 mL de plasma. Qual o número mínimo de congeladores que o banco precisou alugar, para estocar todas as bolsas de plasma dessa semana?

5 - (FCC – 2012) – Oito caminhões pipa de mesma capacidade foram contratados para encher completamente 12 reservatórios de água de um condomínio, também com capacidades iguais. Como 2 caminhões quebraram antes de chegar ao seu destino, os que restaram encheram quantos reservatórios?

6 - (ENEM 2012) Uma mãe recorreu à bula para verificar a dosagem de um remédio que precisava dar a seu filho. Na bula, recomendava-se a seguinte dosagem: 5 gotas para cada 2kg de massa corporal a cada 8 horas. Se a mãe ministrou corretamente 30 gotas do remédio a seu filho a cada 8 horas, então a massa corporal dele é de?

7 - (OBMEP) Os médicos recomendam, para um adulto, 800mg de cálcio por dia. Sabe-se que 1litro de leite contêm 1880mg de cálcio. Quando um adulto bebe 200mL de leite, qual o percentual da dose diária recomendada de cálcio que ele está ingerindo?

8 - (ENEM 2012) Nos shopping centers costumam existir parques com vários brinquedos e jogos. Os usuários colocam créditos em um cartão, que são descontados por cada período de tempo de uso dos jogos. Dependendo da pontuação da criança no jogo, ela recebe um certo número de tíquetes para trocar por produtos nas lojas dos parques. Suponha que o período de uso de um brinquedo em certo shopping custa R$ 3,00 e que uma bicicleta custa 9 200 tíquetes. Para uma criança que recebe 20 tíquetes por período de tempo que joga, qual o valor, em reais, gasto com créditos para obter a quantidade de tíquetes para trocar pela bicicleta?

9 - (ENEM) Uma escola lançou uma campanha para seus alunos arrecadarem, durante 30 dias, alimentos não perecíveis para doar a uma comunidade carente. Vinte alunos aceitaram a tarefa e nos primeiros 10 dias trabalharam 3 horas diárias, arrecadando 12 kg de alimentos por dia. Animados com os resultados, 30 novos alunos somaram-se ao grupo, e passaram a trabalhar 4 horas por dia nos dias seguintes até o término da campanha. Admitindo-se que o ritmo de coleta tenha se mantido constante, qual a quantidade de alimentos arrecadados ao final do prazo estipulado?

10 - (OBMEP) José e Pedro decidiram fazer uma viagem de férias para o litoral brasileiro. José, que já havia feito este percurso, afirmou que rodando uma média de 8 horas por dia a uma velocidade média de 60 km/h, tinha levado 6 dias para completá-lo. Pedro comprometeu-se a dirigir 9 horas por dia à velocidade média de 80 km/h. Considerando que Pedro vá dirigindo, qual a quantidade de dias, que levarão para completar o percurso da viagem?

11 - (ENEM 2013) Uma indústria tem um reservatório de água com capacidade para 900m³. Quando há necessidade de limpeza do reservatório, toda a água precisa ser escoada. O escoamento da água é feito por seis ralos, e dura 6 horas quando o reservatório está cheio. Esta indústria construirá um novo reservatório, com capacidade de 500m³, cujo escoamento da água deverá ser realizado em 4 horas, quando o reservatório estiver cheio. Os ralos utilizados no novo reservatório deverão ser idênticos aos do já existente. Qual a quantidade de ralos do novo reservatório?

12 - (ENEM 2016) Um clube tem um campo de futebol com área total de 8 000 m^2, correspondente ao gramado. Usualmente, a poda da grama desse campo é feita por duas máquinas do clube próprias para o serviço. Trabalhando no mesmo ritmo, as duas máquinas podam juntas 200 m^2 por hora. Por motivo de urgência na realização de uma partida de futebol, o administrador do campo precisará solicitar ao clube vizinho máquinas iguais às suas para fazer o serviço de poda em um tempo máximo de 5 h. Utilizando as duas máquinas que o clube já possui qual o número mínimo de máquinas que o administrador do campo deverá solicitar ao clube vizinho?

13 - (ENEM). Se 5 máquinas funcionando 16 horas por dia levam 3 dias para produzir 360 peças, então 4 máquinas iguais às primeiras devem funcionar quantas horas por dia para produzir 432 peças em 4 dias?

14 - (OBMEP). Um fazendeiro possui ração suficiente para alimentar suas 16 vacas durante 62 dias. Após 14 dias, ele vendeu 4 vacas. Passando mais 15 dias ele comprou 9 vacas. Depois desta última compra por quantos dias a reserva de ração foi suficiente para alimentar as vacas?

2.3.2.2 Relato de Aula

No dia 05 de maio de 2018, sucedeu-se a segunda aula no PROMAT, e nitidamente estávamos mais tranquilos, já que o primeiro encontro já havia passado. Iniciamos a aula as 8 horas da manhã, com um número inferior de alunos ao se comparar com o primeiro encontro, estavam presentes 26 alunos, vendo que existiam na sala alguns estudantes novos fizemos novamente uma breve apresentação, depois de saber os nomes e os planejamentos futuros dos novos alunos demos por iniciada a aula.

Na nossa primeira aula passamos por um problema na resolução de um exercício e programamos resolvê-lo novamente no início da aula vigente, a resolução foi refeita de maneira correta no quadro e com acompanhamento atento de todos os alunos, estes por sua vez mostraram-se satisfeitos e pareceram ter entendido perfeitamente a resolução do exercício. Este exercício teve ainda papel importante para relembrarmos os alunos sobre os conteúdos estudados no encontro anterior, após esse procedimento, revisamos os principais pontos que foram trabalhados sobre Razão/Proporção, o conteúdo abordado na aula anterior. Na sequência, falamos aos alunos que é impossível falar sobre regra de três (proporcionalidade) e não falar sobre razão e proporção, por este motivo utilizamos um exercício que já havia sido resolvido usando razão e proporção e fizemos nova resolução através de regras de três. Depois disso pedimos aos alunos que resolvessem um outro exercício para fixação do conteúdo, este foi resolvido rapidamente pelos alunos e em seguida corrigido ao quadro.

Com o primeiro tópico da aula encerrado partimos para uma nova abordagem, nos casos particulares de regra de três, aparecem aquelas que são inversamente proporcionais, alguns cuidados devem ser tomados a fim de diminuir as possibilidades de erro quando se trabalha com questões que possuem essa característica. Sem nenhum encaminhamento redigimos aos alunos um exercício que tem essa propriedade, com intuito de induzi-los ao erro, tal estratégia deu certo, alguns alunos resolveram o exercício e chegaram a uma resposta que não condizia com o resultado esperado por eles, e logo vieram a nos questionar onde tinham errado. Após todos resolverem o exercício, fomos até o quadro e mostramos a particularidade do exercício fazendo com que eles entendessem o porquê do erro ter sido cometido. Em seguida formalizamos tudo, conceituando os principais pontos, chamando a atenção especificamente para essas peculiaridades que os exercícios podem apresentar.

Diferentemente da aula anterior, nesse encontro estava nos sobrando tempo, o que fez com que conduzíssemos a aula mais tranquilamente. A parte da aula destinada à explicação das divisões proporcionais e inversamente proporcionais foi bem produtiva, visto que, justamente por termos tempo sobrando, foi explicado esse conceito calmamente e foi possível então sanar toda e qualquer dúvida dos alunos.

Depois dessa explicação, os alunos resolveram o exercício 3 do Material do Aluno. Notou-se que a maioria dos alunos conseguiram encontrar a resposta correta da maneira correta de se resolver o exercício, então, deduz-se que, até ali, os alunos estavam andando junto conosco. Corrigimos o exercício no quadro e, logo após, se deu a hora do intervalo.

Na volta à aula, utilizamos a mesma metodologia que foi utilizada anteriormente, agora para introduzir o tópico de regra de três composta. Demos, sem nenhum tipo de formalização, um exercício envolvendo várias grandezas aos alunos e pedimos que resolvessem. Novamente, os alunos acharam respostas não-condizentes, ou não acharam nenhuma resposta, e novamente, fomos ao quadro para explicar como se dava a resolução do exercício. Após explicado o exercício, encaminhamos outro problema para os alunos, abordando o mesmo conteúdo. Dessa vez, conhecido o método de resolução e como se deve pensar para resolver o exercício, a maioria dos alunos o solucionaram corretamente.

Após isso, pedimos aos alunos que continuassem a resolver os outros exercícios do Material, enquanto passávamos auxiliando os mesmos.

Notou-se que alguns alunos se adiantaram, e mesmo enquanto corrigíamos os exercícios anteriores no quadro, já estavam fazendo o restante da lista. Esses mesmos alunos conseguiram terminar, ou quase terminar, o material em sala, no entanto, alguns outros tinham dificuldades na interpretação do exercício ou na resolução do mesmo. Isso novamente demonstra a heterogeneidade da turma, mesmo que num grau menor que o encontro passado, visto que a turma estava um pouco menor.

Vale ressaltar também que, como nós estagiários, estávamos mais a vontade com os alunos, estes já se sentiram mais a vontade conosco, participando mais ativamente da aula, comentando, perguntando, sugerindo, isso faz a aula fluir melhor e, do nosso ponto de vista, torna a aula mais produtiva, tanto para os alunos quanto para nós. Dessa aula, saímos com uma expressão de satisfação estampada em nossas faces.

2.3.3 Plano de Aula do dia 12/05/2018

3º ENCONTRO

Público-Alvo:

Alunos do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

Objetivo Geral:

Compreender o conceito de polinômio bem como realizar operações envolvendo o mesmo.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com Polinômios, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Reconhecer polinômios;
- Identificar o grau de um polinômio;
- Realizar as 4 operações básicas com polinômios;

- Resolver exercícios que envolvam o conteúdo.

Conteúdo: Polinômios.

Recursos Didáticos: Quadro, giz, algeplan, lista de exercícios.

Encaminhamento metodológico:

1. Principais pontos da aula anterior e introdução do conteúdo (Definição de monômio, binômio e polinômio) (25 min)

Relembraremos os principais pontos da aula anterior que seriam organizar as grandezas, de modo que as iguais estejam uma sobre a outra, eximindo qualquer possibilidade de erro e analisar se as proporções são diretamente ou inversamente proporcionais, fazendo assim uma rápida revisão sobre os nossos últimos encontros.

Em seguida, definiremos o conceito de monômio, binômio e polinômio e apresentaremos um exemplo, para que a definição fique mais clara para os alunos.

DEFINIÇÃO*:* Monômio é todo produto de números reais, expresso ou não por variáveis.

EXEMPLOS: 8x; -4y; 2xy; 6; x^2y.

Num monômio, por exemplo $-4x^3y^2$, distinguimos duas partes:

- O **coeficiente numérico**: - 4
- A **parte literal**: x^3y^2

DEFINIÇÃO: **Polinômios** são expressões algébricas formadas pela adição de monômios.

Observação: Os polinômios de dois termos também são chamados de binômios, assim como, os polinômios de três termos são chamados de trinômios.

EXEMPLOS: $-9x^2y$ é um monômio; b - 2c é um binômio; $a^2 + 2ab + b^2$ é um trinômio.

O grau de um monômio é a soma dos expoentes da sua parte literal. Num polinômio que possui mais de 2 monômios, para encontrarmos o seu grau é preciso observar se ele está com os termos semelhantes reduzidos se estiver escrito na forma reduzida, o grau que ele irá assumir é o do monômio que tiver o grau maior.

EXEMPLOS:

a) $10x^2y^5$ é um monômio de grau 7, pois quanto temos apenas 1 monômio somamos os coeficientes de suas partes literais.
b) Um monômio que é um número, por exemplo -4, tem grau zero.

O grau de um polinômio é dado pelo seu termo de maior grau.

Por exemplo, x^2-5x+6 é um trinômio do 2° grau; x^3-x^2y, um binômio do 3° grau em **x** e do 1° grau em **y**.

2. <u>Adição e subtração de polinômios (20 min)</u>

Com a ajuda do Algeplan, introduziremos a ideia de adição e subtração de polinômios. Primeiro, iremos mostrar no Algeplan como se dá essa operação, e depois, faremos novamente no quadro a explicação da operação.

Inicialmente, mostraremos como trabalhar com o Algeplan.

O Algeplan é composto de seis conjuntos de peças, que tem a seguinte composição:

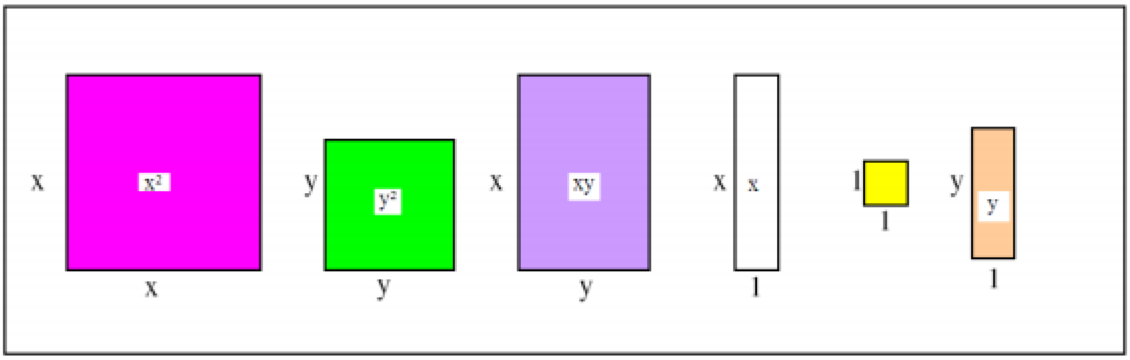


Figura 3: Tipos de peças que compõem o Algeplan. Fonte: Os Autores.

Com essas peças, é possível montar um polinômio, como no exemplo abaixo, em que o polinômio $x^2 + 2y^2 + xy + 2x + 4$ foi representado por meio das peças:

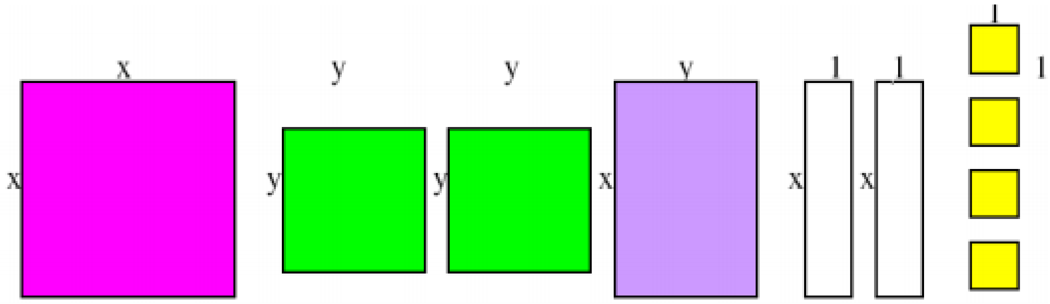


Figura 4: Representação do polinômio $2x^2 + 2y^2 + xy + 2x + 4$ no Algeplan. Fonte: Os Autores.

Então, conhecendo as peças do Algeplan, podemos realizar operações.

Iremos inicialmente mostrar como fazer a operação de adição. Somaremos $x^2 + y + 1$ com $x^2 + y^2 + 2y + 3$, da seguinte forma:

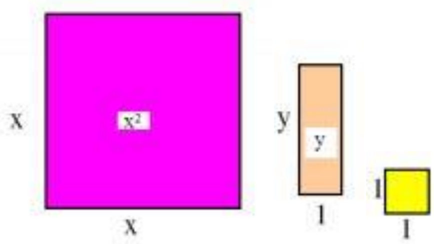


Figura 5: Representação de $x^2 + y + 1$. Fonte: Os Autores.

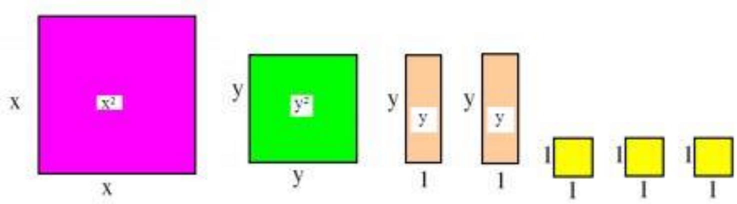


Figura 6: Representação de $x^2 + y^2 + 2y + 3$. Fonte: Os Autores.

O resultado algébrico dessa soma é $2x^2 + y^2 + 3y + 4$. Então, a representação no Algeplan é a mesma:

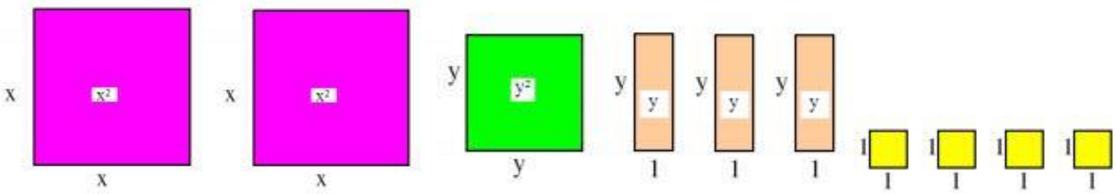


Figura 7: Representação da soma que resulta em $2x^2 + y^2 + 3y + 4$. Fonte: Os Autores.

Para o processo da subtração, foi convencionado um método tabelado para justificar os termos negativos do polinômio $x^2 - y^2 - xy + x - y - 1$. Os termos positivos são deixados na parte de cima, enquanto os termos negativos são deixados na parte de baixo, como mostrado na tabela a seguir:

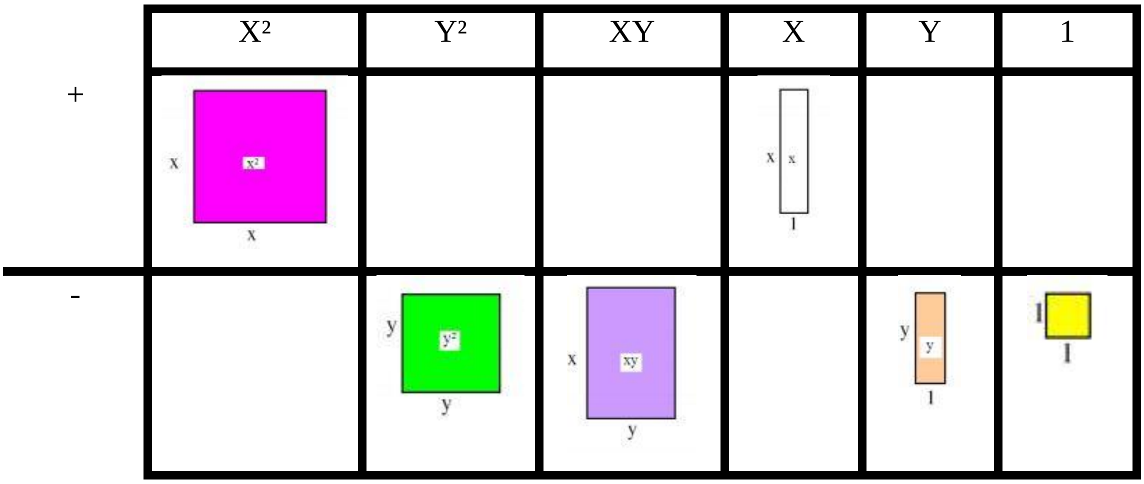


Tabela 2: Indicação dos termos positivos e negativos do polinômio.

Utilizando o mesmo processo da adição, juntamente com método indicado da tabela 1, explicaremos a subtração de polinômios.

Vamos subtrair o polinômio $x^2 - 2y^2 - 2xy - 3y - 4$ do polinômio $2x^2 + y^2 + xy + x + 2y + 3$, resultando em $x^2 - y^2 - xy + x - y - 1$, que é o polinômio indicado na tabela 1.

3. <u>Multiplicação de polinômios (15 min)</u>

Com a ajuda do Algeplan, introduziremos a ideia de multiplicação de polinômios. Primeiro, iremos mostrar no Algeplan como se dá essa operação, e depois, faremos novamente no quadro a explicação da operação.

Para se explicar a operação de multiplicação no Algeplan, usaremos novamente uma tabela, como mostra a figura abaixo que exemplifica a multiplicação de 2y por 2x + 2.

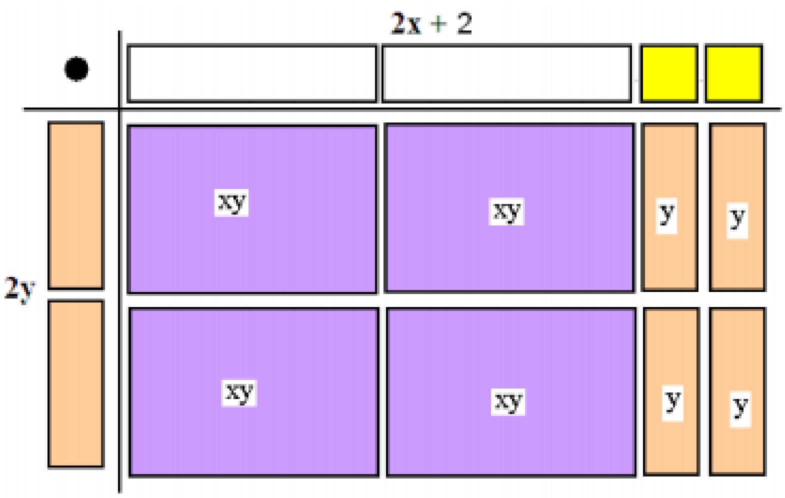


Figura 8: Representação da operação multiplicação de 2y por 2x + 2. Fonte: Os Autores.

Temos na horizontal as peças x, x, 1 e 1, na vertical duas peças y, a multiplicação ocorre figura a figura, então faremos y.x, o aluno vai relacionar y e x com os lados das peças do Algeplan, obtendo a peça de lados y e x, esta multiplicação ocorre 4 vezes pois temos duas figuras y e duas figuras x, logo temos quatro peças xy. Posteriormente, faremos y.1 obtendo como resultado a peça do Algeplan de lado y e 1, também repetimos esta operação 4 vezes, obtendo quatro peças y. Assim, obtemos o resultado da multiplicação 4xy + 4y.

4. <u>Exercícios de Fixação (25 min)</u>

Será dado um exercício de cada operação para resolvermos juntamente com os alunos.

EXERCÍCIOS:

Soma e subtração:

Dados os polinômios:

$$f(x) = 7 - 2x + 4x^2$$
$$g(x) = 5 + x + x^2 + 5x^3$$
$$h(x) = 2 - 3x + x^4$$

Calcular (f+g) (x), (g-h) (x) e (h-f) (x).

Multiplicação:

Dados os polinômios:

$$f(x) = 2 + 3x - 4x^2$$

$$g(x) = 7 + x^2$$
$$h(x) = 2x - 3x^2 + x^3$$

Calcular (fg) (x), (gh) (x) e (hf) (x).

5. Produtos Notáveis (15 min)

Também com a ajuda do Algeplan, é possível mostrar os resultados de produtos notáveis. Para cada produto notável (quadrado da soma, quadrado da diferença e produto da soma pela diferença), iremos apresentar a ideia no Algeplan e depois faremos o método algébrico no quadro.

Primeiro iremos mostrar como se dá a ideia do quadrado da soma.

Pegaremos duas peças que simbolizam “x” e duas peças que simbolizam o “y”, e colocaremos lado a lado, formando um quadrado de área $(x+y)^2$, como mostra a figura.

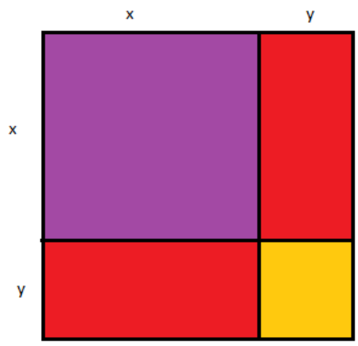


Figura 9: Representação do quadrado de área $(x+y)^2$. Fonte: Os Autores.

Então, a área total desse quadrado de lado (x+y) é o quadrado de lado x somado com dois retângulos de lados x e y e somado ainda com um quadrado de lado y. Ou seja, nossa expressão fica $x^2 + 2xy + y^2$.

Procederemos de maneira equivalente para mostrar o que acontece quando temos o quadrado da diferença.

6. Intervalo

7. Produtos Notáveis (Continuação) (20 min)

Continuando com a explicação de Produtos Notáveis, utilizando o Algeplan, utilizaremos a mesma técnica para mostrar como é feito o produto da soma pela diferença.

8. Divisão de polinômios (25 min)

A divisão de polinômios será explicada apenas em sua forma algébrica, pois o Algeplan nos permite efetuar divisões apenas por polinômios de grau 1, e o Método de Briot-Ruffini vai trazer essa explicação. Então, optou-se por fazer apenas a explicação do método algébrico para divisão geral de polinômios.

Resolveremos a seguinte divisão $(6x^4 - 10x^3 + 9x^2 + 9x - 5) : (2x^2 - 4x + 5)$.

Antes de iniciarmos o processo da divisão é preciso fazer algumas verificações:

- Verificar se tanto o dividendo como o divisor está em ordem conforme o grau dos monômios que compõem o polinômio.
- Verificar se no dividendo, não está faltando nenhum termo, se estiver é preciso completá-lo.

Feito as verificações podemos iniciar a divisão.

$$6x^4 - 10x^3 + 9x^2 + 9x - 5 \;\; \underline{| \, 2x^2 - 4x + 5}$$

• Iremos dividir o 1º termo do dividendo pelo primeiro termo do divisor:

$6x^4 : 2x^2 = 3x^2$

• O resultado encontrado irá multiplicar o polinômio 2x2 – 4x + 5 (divisor).

$(2x^2 - 4x + 5) . (3x^2) = 6x^4 - 12x^3 + 15x^2$

• O resultado desse produto deverá ser subtraído pelo polinômio $6x^4 - 10x^3 + 9x^2 + 9x - 5$ (dividendo).

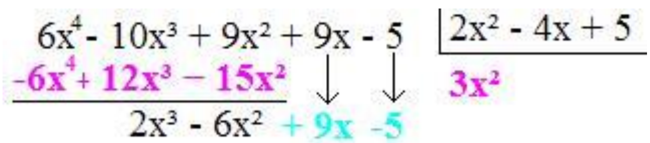


Figura 10: Representação da divisão de polinômios. Fonte: Os Autores.

• Agora iremos levar em consideração o polinômio $2x^3 - 6x^2 + 9x - 5$ e iremos dividir seu 1º termo pelo primeiro termo do dividendo $(2x^2 - 4x + 5)$.

$2x^3 : 2x^2 = x$

• O resultado encontrado irá multiplicar o polinômio $2x^2 - 4x + 5$ (divisor)

$(2x^2 - 4x + 5) . (x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x$

• O resultado desse produto deverá ser subtraído pelo polinômio $2x^3 - 6x^2 + 9x - 5$.

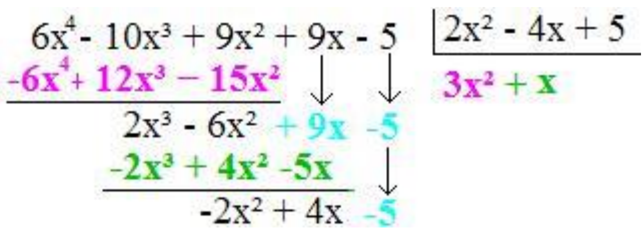


Figura 11: Representação dos passos da divisão de polinômios. Fonte: Os Autores.

• Agora iremos levar em consideração o polinômio -2x2 +4x - 5e dividir seu 1º termo pelo primeiro termo do dividendo ($2x^2 - 4x + 5$).

$2x^2 : 2x^2 = -1$

• O resultado encontrado irá multiplicar o polinômio $2x^2 - 4x + 5$ (divisor).

$(2x^2 - 4x + 5) . (-1) = - 2x^2 + 4x - 5$

• O resultado desse produto deverá ser subtraído pelo polinômio $-2x^2 +4x - 5$.

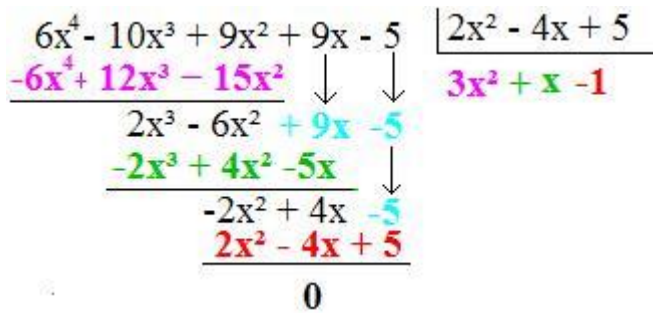


Figura 12: Representação dos passos da divisão de polinômios. Fonte: Os Autores.

Portanto, podemos dizer que $(6x^4 - 10x^3 + 9x^2 + 9x - 5) : (2x^2 - 4x + 5) = 3x^2 +x - 1$, com resto igual a zero. Caso se queira fazer a prova real, basta multiplicar $(3x^2 +x - 1)$ por $2x^2 - 4x + 5$ e verificar se a solução será $6x^4 - 10x^3 + 9x^2 + 9x - 5$. Nesse caso, como o resto é zero, não é preciso somá-lo ao produto.

9. <u>Método Briot-Ruffini (15 min)</u>

Para efetuarmos a divisão de um polinômio **P(x)** por um binômio da forma **(x –** α **)**, podemos utilizar o **dispositivo prático de Briot-Ruffini**.

Vamos efetuar a divisão de $P(x) = 3x^5 - 2x^4 + 3x^2 + 1$ por **x - 2** através desse dispositivo. Acompanhe o roteiro para a resolução:

1º) Colocamos a raiz do divisor e os coeficientes do dividendo (ordenadamente do termo de maior grau para o termo de menor grau, completando com zero os termos que não aparecem) no dispositivo:

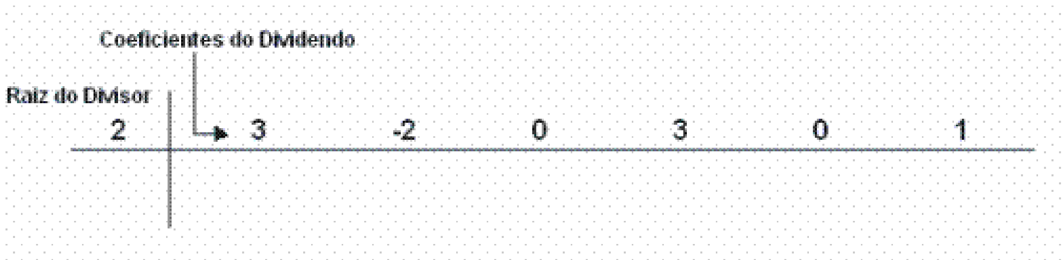


Figura 13:Representação da divisão pelo método de Briot-Ruffini. Fonte: Os Autores.

2º) Abaixamos o primeiro coeficiente do dividendo:

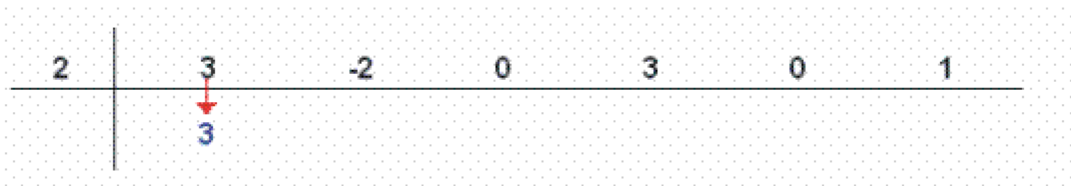


Figura 14: Representação dos passos da divisão. Fonte: Os Autores.

3º) Multiplicamos a raiz do divisor pelo coeficiente repetido e somamos o produto com o segundo coeficiente do dividendo, colocando o resultado abaixo deste:

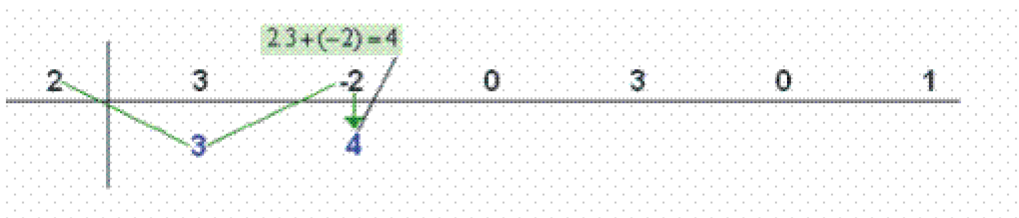


Figura 15: Representação dos passos da divisão. Fonte: Os Autores.

4º) Multiplicamos a raiz do divisor pelo número colocado abaixo do 2º coeficiente e somamos o produto com o 3º coeficiente, colocando o resultado abaixo deste, e assim sucessivamente:

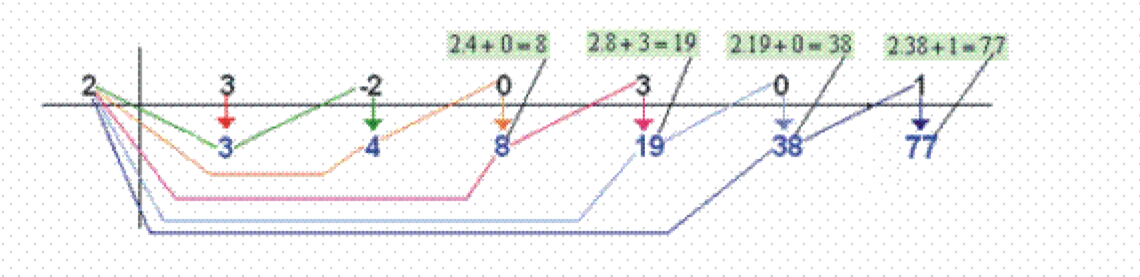


Figura 16: Representação dos passos da divisão. Fonte: Os Autores.

5º) Fazemos um traço entre o último e o penúltimo números obtidos. O último número é igual ao resto da divisão e os números que ficam à esquerda deste são os coeficientes do quociente:

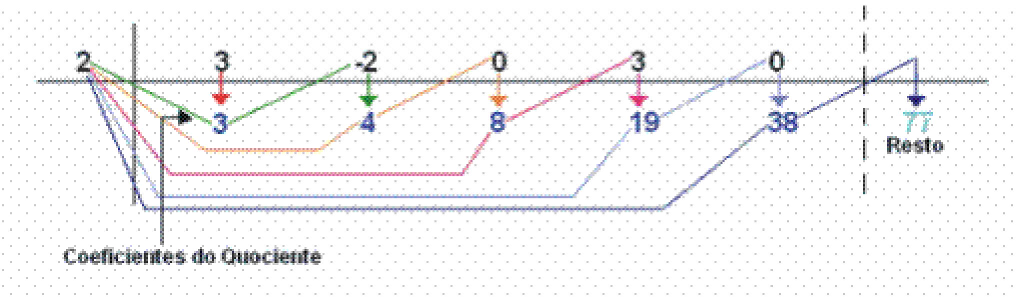


Figura 17: Representação dos passos da divisão. Fonte: Os Autores.

Portanto, $Q(x) = 3x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 19x + 38$ e $r = 77$.

10. Exercício para fixação de divisão (10 min)

(UEL) Adaptado. Verificar se o polinômio $x^3-x^2-14x+24$ é divisível por x-2 e x+4.

11. Exercícios do Material do Aluno (15 min)

Pediremos para que os alunos resolvam os exercícios do material do aluno, enquanto passeamos pela sala auxiliando os mesmos.

12. Esclarecimento das Principais dúvidas (10 min)

Temos que dar mais atenção às principais e mais recorrentes dúvidas que surgirem. Então, a ideia dessa parte da aula é sanar essas dúvidas, para que nenhum aluno saia com questionamentos desse encontro.

13. Encerramento e despedida (5 min)

Aqui, daremos uma pequena introdução da próxima aula, que terá o foco em equações, mostrando os principais pontos a serem tratados posteriormente.

Avaliação:

A avaliação ocorrera por meio da observação na aula e da resolução dos exercícios.

Referências:

GUELLI, Oscar. **Matemática:** uma aventura do pensamento. São Paulo: Ática, 1999.

BIGODE, Antonio José Lopes. **Matemática hoje é feita assim**. São Paulo: FTD,2000.

IEZZI, Gelson. **Matemática e realidade 7ª série**. São Paulo: Atual, 2000.

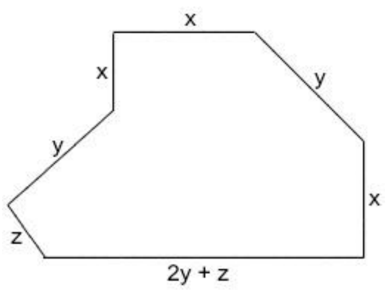
CHAVANTE, E. **Matemática**, Coleção Convergências. São Paulo: SM, 2015.

MIRANDA, Danielle de, **Termos semelhantes e grau de polinômios**, http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/termos-semelhantes-grau-polinomios.htm. Acesso em: 24 Abr 2018.

2.3.3.1 Material do Aluno

MATERIAL DO ALUNO 3° ENCONTRO

1 - (EAM – Aprendiz de marinheiro) Analise a figura a seguir:



Suponha que o terreno comprado por um proprietário tenha a forma da figura acima e suas medidas sejam representadas, em unidades de comprimento, pelas variáveis X, Y e Z. Qual a expressão algébrica que representa o perímetro desse terreno?

2- (EAM – Aprendiz de marinheiro) Reduzindo-se os termos semelhantes da expressão b(a - b) + (b + a) (b - a) - a(b - a) + $(b - a)^2$, obtém-se?

3- (Ufg 2007) Considere o polinômio:

$p(x) = (x - 1)(x - 3)^2(x - 5)^3(x - 7)^4(x - 9)^5(x - 11)^6$.

Qual o grau de p(x)?

4- Sendo dados os polinômios $f = x,\ g = x + x^3\ e\ h = 2x^3 + 5x$, obter os números reais a e b tais que $h = af + bg$.

5- (Ita) A divisão de um polinômio P(x) por x^2-x resulta no quociente $6x^2+5x+3$ e resto -7x. Qual o resto da divisão de P(x) por 2x+1?

6- (Cesgranrio) Qual o resto da divisão de polinômios $P(x)=(x^2+1)^2 \div D(x)=(x-1)^2$?

7- (Unaerp) Se $P(x) = 3x^3 - 5x^2 + 6x + a$ é divisível por x - 2, então quais os valores de a e de P(2)?

8-(UEL) Adaptado. Dividindo-se o polinômio $x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 4x - 21$ por x + 3, obtêm-se qual quociente e resto?

9- (FEI-SP) Dividindo-se $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 8x + 3$ por S(x), obtêm-se um quociente Q(x) = 2x – 1 e um resto R(x) = 3x + 5. Qual a expressão algébrica de S(x)?

10 - Dividindo f(x) por $x^2 + x$, obtemos o quociente $q(x) = x^2 - x - 2$ e o resto r(x) = 7x – 1. Obtenha o polinômio f(x).

2.3.3.2 Relato de Aula

No dia 12 de maio de 2018, iniciamos nossa terceira aula do PROMAT às 8 horas da manhã estavam presentes 24 alunos e haviam alunos que não estavam presentes em outras aulas, então pedimos que se apresentassem dizendo seu nome, de onde eram e quais seus planos futuros, nos apresentamos e então prosseguimos a aula. Começamos lembrando os conteúdos estudados nos encontros anteriores e relembramos os principais pontos apresentados.

Posteriormente, iniciamos a aula planejada para aquele dia, na qual trabalhamos o conteúdo de polinômios. Para isto, apresentamos a definição no quadro, explicando e tirando as dúvidas referentes. Tivemos um problema com a definição do grau de monômios e polinômios, apresentamos a definição correta aos alunos no quadro, isto é, que o grau de um monômio é a soma de seus expoente, no entanto, quando fomos exemplificar apresentamos o monômio: x^2y^5 que tem grau igual a sete, mas dizemos que seu grau seria dois para x e cinco para y, o que não está errado mas acabou gerando dúvida nos alunos e consequentemente tomando um tempo que não havíamos planejado, mas explicamos novamente corrigindo a confusão ocorrida anteriormente para deixarmos claro o conteúdo.

Posteriormente, entregamos aos alunos um kit de algeplam e explicamos os valores que cada peça admitia para que soubessem manuseá-lo para realizar as operações a seguir. Logo após, apresentamos as operações de soma, subtração e multiplicação de polinômios com o auxílio das peças do algeplam, utilizando um exemplo de cada operação para explicar como efetuar as operações com este material. Depois disso, passamos aos alunos o exercício que utilizava as operações de soma e subtração que havíamos previsto no plano de aula, essa resolução por parte dos alunos acabou levando mais tempo que o esperado e não conseguimos realizar a correção antes do intervalo. Após o intervalo, resolvemos os exercícios e também apresentamos um exercício para utilizar a operação de multiplicação de polinômios, este nós resolvemos junto com os alunos, esclarecendo todas as dúvidas.

Tínhamos planejado começar a explicar o tópico de produtos notáveis antes do intervalo, mas como não tivemos tempo, realizamos a explicação após terminarmos as resoluções dos exercícios. Primeiramente, explicamos o quadrado da soma, que ocorreu sem problemas, na explicação sobre o quadrado da diferença, tivemos um problema com a demonstração algébrica, pois desenhamos o quadrado e nomeamos seus lados corretamente, mas quando foi realizada a demonstração acabamos desconsiderando um lado (a-b) chegando assim em um resultado incorreto, mas no mesmo momento conseguimos encontrar o erro cometido e refizemos a demonstração contornando este erro sem maiores problemas. Esclarecidas as dúvidas, nos encaminhamos ao próximo tópico.

Nosso próximo tópico era a operação de divisão de polinômios, já havíamos imaginado que poderia haver mais dúvidas nesta operação do que nas outras operações, e que deveríamos nos atentar, já que alguns alunos possuíam dúvidas no método euclidiano da divisão. Com tempo menor do que havíamos imaginado para a explicação de divisão de polinômios, conseguimos realizá-la sem problemas, mas o exercício de fixação que estava planejado, utilizamos como exemplo na explicação para que desse tempo de ser realizado. Primeiramente explicamos a divisão em sua forma algébrica, utilizando um exemplo da divisão exata de um polinômio por um binômio (ou seja, com resto igual a 0). Para este exemplo utilizamos um exercício do plano de aula que estava planejado para ser exercício de fixação, pois entendemos que explicando em etapas haveria uma melhor compreensão por parte dos alunos. Posteriormente, realizamos a divisão de um polinômio que não possui divisão exata (ou seja, com resto diferente de 0), para podermos explicar como eles deveriam proceder com estes casos. Logo após esclarecermos as dúvidas referentes a este método, realizamos também com os alunos a divisão de um polinômio de grau três por um de grau dois para fixarmos os passos do método apresentado.

Em seguida apresentamos aos alunos, o método de Briott-Ruffini, explicitando o fato de ser utilizado somente para a divisão de polinômios quaisquer com divisores sendo binômios (ou seja da forma ax+b). Realizamos então a operação com os mesmos exemplos do método em sua forma algébrica para mostrar a validade do método de Briott-Ruffini e em seguida esclarecemos as dúvidas.

Em nosso tópico de divisão de polinômios havíamos planejado um exercício de fixação, mas como explicado anteriormente não tínhamos tempo devido aos atrasos durante a aula e introduzimos o exercício na explicação do método da divisão.

Entregamos a lista do material do aluno e passamos nos grupos esclarecendo e ajudando com qualquer dúvida referente a lista, como havia pouco tempo para o final da aula, esta ficou para os alunos resolverem em casa e qualquer dúvida com os exercícios, esclareceríamos na próxima aula. Em seguida, apresentamos qual seria o conteúdo abordado na próxima aula, a saber: Equações. Encerrando assim nosso terceiro encontro do PROMAT.

2.3.4 Plano de aula do dia 19/05/2018

4º ENCONTRO

Público-Alvo:

Alunos do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

Objetivo Geral:

Compreender os conceitos de equações e sistemas para resolução destas.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com Equações, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Compreender o conceito de equações;
- Entender as particularidades das equações de primeiro e segundo grau;
- Resolver situações que envolvam equações de primeiro e segundo grau;
- Compreender e resolver sistemas de equações.

Conteúdo: Equações.

Recursos Didáticos: Quadro, giz, lista de exercícios, projetor, geogebra.

Encaminhamento metodológico:

1. Principais pontos da aula anterior (10 min)

Relembraremos como são realizadas as operações básicas em polinômios fazendo uma rápida revisão da aula anterior.

2. Equações de primeiro grau com uma e/ou duas incógnitas (35 min)

Aqui, definiremos o conceito de Equação e apresentaremos um exemplo, para que a definição fique mais clara para os alunos.

DEFINIÇÃO: Denomina-se equação a sentença matemática expressada por uma igualdade com uma ou mais letras, chamadas incógnitas, que representam números desconhecidos.

Resolver uma equação é determinar os valores numéricos possíveis para a igualdade ser verdadeira, ou seja, determinar a solução ou a raiz da equação.

EXEMPLO: A sentença $2x + 3 = 13$ é uma equação, onde x é a incógnita, $2x + 3$ é chamado de Primeiro Membro, 13 é chamado de Segundo Membro e a solução dessa equação é $x = 5$.

A sentença $2x + y = 4$ é uma equação, onde x e y são as incógnitas, $2x + y$ é o Primeiro Membro, 4 é o Segundo Membro e existem infinitas soluções para essa equação, na forma em que se encontra.

3. Sistemas de equações de primeiro grau com duas incógnitas (30 min)

Aqui, conceituaremos Sistema de Equação e apresentaremos um exemplo, para que fique claro para os alunos, todos os conceitos que são envoltos por este conteúdo.

DEFINIÇÃO: Um sistema de equações do primeiro grau com duas incógnitas é o um conjunto formado por duas equações do primeiro grau, onde cada equação possui duas variáveis x e y.

EXEMPLO: $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$ onde x e y são os valores desconhecidos e são chamados de variáveis.

Resolveremos esse exemplo no quadro e, após resolvermos, mostraremos que o par ordenado que soluciona esse sistema pode ser encontrado na intersecção das retas $x + y = 6$ e $x - y = 2$ no plano cartesiano. Mostraremos a intersecção no Geogebra.

4. Exercícios de Fixação (25 min)

EXERCÍCIO: No túmulo do matemático Diofanto, está escrito o seguinte texto:

Caminhante! Aqui estão sepultados os restos de Diofanto. E os números podem mostrar (milagre!) quão longa foi a sua vida, cuja sexta parte foi a sua bela infância. Tinha decorrido mais uma duodécima parte de sua vida, quando seu rosto se cobriu de pelos. E a sétima parte de sua existência decorreu com um casamento estéril. Passou mais um quinquênio e ficou feliz com o nascimento de seu querido primogênito, cuja bela existência durou apenas metade da de seu pai, que com muita pena de todos desceu à sepultura quatro anos depois do enterro de seu filho. Quantos anos tinha Diofanto quando morreu?

5. Intervalo

6. Equações de segundo grau (20 min)

Aqui, definiremos Equação de Segundo Grau e apresentaremos um exemplo, resolvendo-o pelo método resolutivo para equações do segundo grau, popular fórmula de Bhaskara, para que a definição fique mais clara para os alunos.

DEFINIÇÃO: Uma equação do segundo grau completa tem a forma $ax^2+bx+c=0$, onde $a\neq0$. Uma equação do segundo grau incompleta se dá quando b=0 ou c=0.

EXEMPLO: Encontre os números reais tais que $x^2 - 5x + 6=0$ (Solução: 2 e 3)
RESOLUÇÃO: A resolução dessa equação pode ser apresentada pela Fórmula resolutiva para equações do segundo grau (Bhaskara), que é dada por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Onde, no caso do exemplo, a = 1, b = -5 e c = 6. Sempre *a* é o número que acompanha o x^2, *b* é o número que acompanha o x e *c* é o número independente. O termo $b^2 - 4ac$ é chamado discriminante. Se o discriminante for maior que zero, a equação apresenta duas soluções x' e x'', tal que x' ≠ x''. Se o discriminante for igual a zero, a equação apresenta duas soluções x' e x'', tal que x' = x''. Se caso o discriminante for menor que zero, a equação não apresenta soluções reais.
Aplicando cada valor da equação dada na fórmula, temos:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 * 1 * 6}}{2 * 1}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2 * 1}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2}$$

Vemos que o discriminante aqui é maior que zero. Portanto, essa equação apresenta duas soluções x' e x'' diferentes uma da outra.

$$x = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$x' = \frac{6}{2} \qquad x'' = \frac{4}{2}$$

$$x' = 3 \qquad x'' = 2$$

Encontramos duas soluções que satisfazem a equação dada primeiramente. Se substituirmos x = 3 ou x = 2 na equação, encontramos, em ambos os casos, 0 = 0.

7. Método alternativo de resolução de equações de segundo grau (20 min)

Utilizando o mesmo exemplo do item anterior, a ideia aqui é mostrar que há outro modo de se obter as soluções da equação x^2-5x+6=0. O método pode ser interpretado de duas formas. Com a fórmula da chamada “soma e produto” ou, com olhos na aula anterior, utilizando a fatoração.

Utilizaremos as seguintes “expressões”:

$x' + x'' = \frac{-b}{a}$ $\qquad$ $x' * x'' = \frac{c}{a}$

Devemos achar x’ e x’’ tais que satisfaçam as duas equações acima ao mesmo tempo.

No caso da equação x^2 - 5x + 6 = 0, as expressões ficam:

$x' + x'' = \frac{5}{1}$ $\qquad$ $x' * x'' = \frac{6}{1}$

Então, os dois números, x’ e x’’, que satisfazem as expressões acima são x’ = 3 e x’’ = 2.

8. Atividade com resolução de equações (20 min)

Realizaremos com os alunos neste momento uma atividade para resolução de equações, adaptaremos o jogo conhecido como stop para joga-lo com equações. Passaremos aos alunos quatro equações por rodada, para que os grupos com até quatro pessoas resolvam, quando as quatro equações estiverem resolvidas, poderão falar STOP.

EQUAÇÕES:

$3x + 7 = 12$ $14 - 4x = -9$ $8x + 5 = 3$ $8 - 3x = 1$	$\begin{cases} 3x - z = 4 \\ z - x = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x - 3z = 12 \\ 2z + x = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x - y = 7 \end{cases}$	$x^2 + 3x - 4 = 0$ $2x^2 - 3x + 2 = 0$ $x^2 - x - 12 = 0$ $3x^2 - 6x - 24 = 0$

$9x - 12 = 31$ $7x + 32 = -12$ $6x - 37 = 9$ $5x - 4 = 17$	$\begin{cases} 3y - z = 7 \\ 2z + y = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x + 2z = -3 \\ 2x - z = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} y + 4z = -2 \\ z - 2y = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} 7x - 4y = 12 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$	$-x^2 + 4x - 7 = -4$ $x^2 - 4x = 5$ $x^2 + x - 14 = 28$ $2x^2 - 10x = -12$

Quadro 1: Quadro com equações para atividade Stop.

9. Exercícios do Material do Aluno (20 min)

Pediremos para que os alunos resolvam os exercícios do material do aluno, enquanto passeamos pela sala auxiliando os mesmos.

10. Esclarecimento das principais dúvidas (10min)

Parte destinada para esclarecimento das principais dúvidas da aula e dos exercícios aplicados

11. Encerramento e despedida (10 min)

Aqui, resumiremos os pontos mais importantes da aula, além de dar uma breve introdução no conteúdo da aula seguinte.

Avaliação:

A avaliação ocorrera por meio da observação em sala de aula e também durante a atividade desenvolvida de resolução de equações.

Referências:

BARROSO, Juliane M. **Projeto Araribá:** Matemática. São Paulo: Moderna, 2006.

GUELLI, Oscar. **Matemática:** uma aventura do pensamento. São Paulo: Ática, 1998.

ANDRINI, Álvaro. Novo praticando matemática. São Paulo: Editora do Brasil, 2002.

IEZZI, Gelson. Matemática e realidade: 7° série. 4. ed reform. São Paulo: Atual, 2000.

2.3.4.1 Material do Aluno

MATERIAL DO ALUNO 4° ENCONTRO

1 - Um grupo de 50 pessoas fez um orçamento inicial para organizar uma festa, que seria dividido entre elas em cotas iguais. Verificou-se ao final que, para arcar com todas as despesas, faltavam R$ 510,00, e que 5 novas pessoas haviam ingressado no grupo. No acerto foi decidido que a despesa total seria dividida em partes iguais pelas 55 pessoas. Quem não havia ainda contribuído pagaria a sua parte, e cada uma das 50 pessoas do grupo inicial deveria contribuir com mais R$ 7,00. De acordo com essas informações, qual foi o valor da cota calculada no acerto final para cada uma das 55 pessoas?

2 - O Salto Triplo é uma modalidade do atletismo em que o atleta dá um salto em um só pé, uma passada e um salto, nessa ordem. Sendo que o salto com impulsão em um só pé será feito de modo que o atleta caia primeiro sobre o mesmo pé que deu a impulsão; na passada ele cairá com o outro pé, do qual o salto é realizado. Um atleta da modalidade Salto Triplo, depois de estudar seus movimentos, percebeu que, do segundo para o primeiro salto, o alcance diminuía em 1,2 m, e, do terceiro para o segundo salto, o alcance diminuía 1,5 m. Querendo atingir a meta de 17,4 m nessa prova e considerando os seus estudos, qual deve ser a distância alcançada no primeiro salto?

3 - (CESPE/UnB-Adaptada) Um motorista, após ter enchido o tanque de seu veículo, gastou 1/5 da capacidade do tanque para chegar à cidade A; gastou mais 28 L para ir da cidade A até a cidade B; sobrou, no tanque, uma quantidade de combustível que corresponde a 1/3 de sua capacidade. Quando o veículo chegou à cidade B, quanto ainda havia no tanque?

4 - Determine o valor de m na equação $(m-5)x=2013$, para que a equação não admita solução.

5 - Três números consecutivos somam 369. Determine esses números.

6 - Uma loja de produtos esportivos vende todas as bolas de basquetebol pelo mesmo preço unitário igual a X reias, todas as bolas de handebol pelo mesmo preço unitário de Y reias e todas as bolas de futebol pelo mesmo preço unitário igual a Z reais. João comprou na loja 5 bolas de basquetebol, 6 bolas de handebol e 8 bolas de futebol, pagando um total de R$ 770,00. Carlos comprou na loja 2 bolas de basquetebol, 3 bolas de handebol e 5 bolas de futebol, pagando um total de R$431,00. Qual o valor da soma de (X+Y+Z)?

7 - (ENEM 2013) Na aferição de um novo semáforo, os tempos são ajustados de modo que, em cada ciclo completo (verde-amarelo-vermelho), a luz amarela permaneça acesa por 5 segundos, e o tempo em que a luz verde permaneça acesa seja igual a 2/3 do tempo em que a luz vermelha fique acesa. A luz verde fica acesa, em cada ciclo, durante X segundos e ciclo dura Y segundos. Qual é a expressão que representa a relação entre X e Y?

8 - (UFG) Uma agência de turismo vende pacotes familiares de passeios turísticos, cobrando para crianças o equivalente à $\frac{2}{3}$ do valor para adultos. Uma família de cinco pessoas, sendo três adultos e duas crianças, comprou um pacote turístico e pagou um valor total de R$8125,00. Com base nessas informações, calcule o valor que a agência cobrou de um adulto e de uma criança para realizar esse passeio.

9 - O par (x, y) é a solução do sistema $\begin{cases} x + y = 20 \\ x - y = 6 \end{cases}$, qual o valor de $x^2 - y^2$?

10 - (Unesp 96) Dada a equação $x^2 + x - \sqrt{2} = 0$, calcule a soma dos inversos de suas raízes.

11 - (Puc Camp 99) Uma bola é largada do alto de um edifício e cai em direção ao solo. Sua altura h em relação ao solo, t segundos após o lançamento, é dada pela expressão $h=-25t^2 + 625$. Após quantos segundos do lançamento a bola atingirá o solo?

12 - (Vunesp) Em um campeonato de futsal, se um time vence, marca 3 pontos; se empata, marca 1 ponto e se perde não marca nenhum ponto. Admita que, nesse campeonato, o time **A** tenha participado de 16 jogos e perdido apenas dois jogos. Se o time **A**, nesses jogos, obteve 24 pontos, então a diferença entre o número de jogos que o time **A** venceu e o número de jogos que empatou?

2.3.4.2 Relato de Aula

No dia 19 de maio de 2018, no quarto encontro do Promat, estavam presentes 23 alunos, antes de iniciarmos as atividades preparamos a sala para que os alunos se organizassem em grupos. Iniciamos a aula as 8 horas da manhã. Percebendo que havia uma aluna que não estava presente nas outras aulas, pedimos que a mesma se apresentasse, dizendo seu nome e de onde era, nos apresentamos também e então começamos a aula.

No primeiro momento desta aula, fizemos uma retomada do encontro anterior, relembrando as operações básicas que podem ser trabalhadas com polinômios, esta ocorreu de forma proveitosa, pois tiramos algumas dúvidas dos alunos, trazendo a eles uma maior compreensão do conteúdo que vinha sendo estudado. Em seguida, passamos para a explicação do conceito de equação, buscamos então exemplificar a situação por meio da solução da equação: $2x + 3 = 13$, neste momento um aluno nos sugeriu o seguinte processo:

$$2x + 3 = 13 \rightarrow \ 2x = 13 + 3 \rightarrow \ x = \frac{16}{2} = 8$$

Explicamos para a turma que o processo feito pelo colega não estava correto, após tirar a dúvida deste aluno, mostramos o processo correto, da seguinte maneira:

$$2x + 3 = 13 \rightarrow 2x + 3 - 3 = 13 - 3 \rightarrow 2x = 10 \rightarrow x = \frac{10}{2} = 5$$

A partir da nova explicação do exemplo, os alunos se mostraram satisfeitos e pareceram ter entendido perfeitamente a resolução do exemplo proposto.

Seguindo nossa aula, passamos para a definição de sistemas de equações, neste momento mostramos que se tivermos apenas uma equação com duas incógnitas, teremos infinitas soluções para a mesma, utilizou-se neste exemplo leis gráficas, para mostrar de forma prática o que se estava a demonstrar. Notamos que os alunos ficaram um pouco confusos com nossa explicação, porém com a introdução dos gráficos em meio a explicação tornou-se possível a compreensão por parte dos alunos, relatamos em seguida o que se deve fazer quando estivermos frente a duas equações, conceituou-se então os sistemas lineares e seus métodos de resolução, a saber: os métodos tradicionais de adição ou subtração, utilizamos também a interpretação gráfica. Introduziríamos nessa parte da aula a utilização do software Geogebra, porém não foi possível utiliza-lo, fato recorrente as condições climáticas ocorridas na noite anterior, que resultou na queda de energia e assim não foi possível utiliza-lo, mas fizemos no quadro essa explicação sem nenhum problema.

Como estávamos com tempo sobrando, fizemos algo que não estava planejado, mostramos aos alunos os diferentes casos de sistemas lineares, que são: possível, possível indeterminado e impossível. De inicio, como não havíamos planejado explanar sobre esse assunto, tivemos dificuldades em encontrar exemplos adequados, mas com ajuda dos alunos e uma rápida discussão entre os professores, conseguimos resolver esta questão, deixando claro para os estudantes, estes conceitos importantes.

Em seguida, passamos um exercício de fixação sobre equações, após algum tempo fizemos a resolução do mesmo no quadro, sempre contando com o auxílio dos alunos. Como este era um exercício que envolvia frações e noções de MMC (mínimo múltiplo comum), os alunos apresentaram um pouco de dificuldade em resolve-lo, porém, acreditamos que após a correção o exercício ficou claro para todos. E assim deu-se a hora do intervalo.

Na volta do intervalo, definimos e explicamos equações de segundo grau, fazendo uso de um exemplo apresentamos aos estudantes, a fórmula resolutiva de equações de segundo grau, conhecida como fórmula de Bhaskara. Concluímos que esta foi a parte mais tranquila da aula, pois nossos alunos pareciam conhecer este conteúdo e estavam com ele nítido na memória, portanto compreenderam melhor, tanto a definição como a resolução dos exercícios utilizados em sala.

Também mostramos aos estudantes outro método para resolução de uma equação de segundo grau, chamado de soma e produto. Com este método resolvemos o mesmo exemplo anterior. Esta parte da aula também ocorreu tranquilamente com uma boa compreensão dos alunos.

Em seguida, realizamos com os estudantes uma atividade que envolvia a resolução de equações, a fim de avaliarmos o que foi trabalhado durante essa aula e ver se realmente os alunos compreenderam os conteúdos supracitados. A atividade em questão é uma adaptação do jogo STOP. Em cada rodada eram distribuídos aos grupos de quatro alunos, quatro equações o grupo que resolvesse primeiro deveria dizer STOP.

Na primeira rodada um grupo resolveu as equações de forma bem rápida, surpreendendo nós estagiários e os outros alunos. Deixamos essa primeira rodada sem valer pontuação, pois os outros grupos não entenderam exatamente o que deveria ser feiro na atividade. Explicamos novamente a atividade e seguimos com as outras rodadas. Nas demais rodadas, percebemos que os alunos tiveram dificuldades para resolver as equações, e principalmente sistemas lineares, pois a maioria delas resultavam em frações, e alguns alunos possuem dificuldades nesse conceito.

Planejamos seis rodadas, mas não foi possível fazer a aplicação de todas, pois a maioria dos alunos que estavam presentes nesta aula era de outras cidades e por causa de seu transporte tiveram que sair antes do horário previsto para o final da aula. Como planejado, após o jogo do STOP, iriamos entregar os exercícios do material do aluno para que começassem a resolver em sala e desse modo ajudaríamos os estudantes nas dúvidas destes exercícios, mas pelo mesmo motivo citado acima, tivemos que entregar a lista enquanto os alunos resolviam as equações do STOP, para resolverem em casa.

Como tivemos esse equivoco com o horário, acabamos finalizando a aula mais cedo do que o previsto, entretanto com a tranquilidade de que a cada encontro que se passa ficamos mais satisfeitos com o que estamos propondo aos nossos alunos.

2.4 MÓDULO 2 – CONJUNTOS NUMÉRICOS E FUNÇÕES

2.4.1 Plano de aula do dia 09/06/2018

5º ENCONTRO

Público-Alvo:

Alunos do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

Objetivo Geral:

Compreender os conjuntos numéricos e a formação de uma função entendendo suas particularidades para então resolver exercícios que envolvam o conteúdo.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com conjuntos numéricos e introdução de funções objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Entender as particularidades dos conjuntos numéricos;
- Resolver exercícios envolvendo conjuntos;
- Realizar operações matemáticas nos conjuntos numéricos;
- Entender a formação e as particularidades de uma função;
- Resolver exercícios que envolvam funções.

Conteúdo: Conjuntos Numéricos e introdução de funções.

Recursos Didáticos: Quadro, giz, lista de exercícios, projetor.

Encaminhamento metodológico:

1. Dinâmica inicial (15 min)

Iniciaremos a aula com alguns questionamentos a respeito do que os estudantes conhecem e entendem por um conjunto, depois disso uma dinâmica será iniciada, na qual existe um diagrama dos conjuntos numéricos, este estará desenhado no chão da sala. Em seguida distribuiremos plaquinhas com números aos alunos e iremos orientá-los a se posicionarem no diagrama de acordo com o número que possuem.

2. Formalização do conceito de conjuntos (30 min)

Nesta parte iremos projetar as definições e explica-las, nos atentando a qualquer possível duvida.

Os conjuntos numéricos são agrupamentos de objetos que neste caso são números. Eles são formados pelos números naturais, inteiros, racionais, irracionais, reais e complexos.

Conjunto dos Números Naturais (N)

O conjunto dos números naturais é representado por N. Ele reúne os números que usamos para contar (incluindo o zero) e é infinito.

Subconjuntos dos Números Naturais

N^* = {1, 2, 3, 4, 5..., n, ...} ou N* = N – {0}: conjuntos dos números naturais não nulos, ou seja, sem o zero.

N_p = {0, 2, 4, 6, 8..., 2n, ...}, em que n ∈ N: conjunto dos números naturais pares.

N_i = {1, 3, 5, 7, 9..., 2n+1, ...}, em que n ∈ N: conjunto dos números naturais ímpares.

P = {2, 3, 5, 7, 11, 13, ...}: conjunto dos números naturais primos.

Conjunto dos Números Inteiros (Z)

O conjunto dos números inteiros é representado por Z. Reúne todos os elementos dos números naturais (N) e seus opostos. Assim, conclui-se que N é um subconjunto de Z (N ⊂ Z):

Subconjuntos dos Números Inteiros

Z^* = {..., –4, –3, –2, –1, 1, 2, 3, 4, ...} ou Z^* = Z – {0}: conjuntos dos números inteiros não nulos, ou seja, sem o zero.

Z_+ = {0, 1, 2, 3, 4, 5, ...}: conjunto dos números inteiros e não negativos. Note que Z+ = N.

Z^*_+ = {1, 2, 3, 4, 5, ...}: conjunto dos números inteiros positivos e sem o zero.

Z_- = {..., –5, –4, –3, –2, –1, 0}: conjunto dos números inteiros não positivos.

Z^*_- = {..., –5, –4, –3, –2, –1}: conjunto dos números inteiros negativos e sem o zero.

Conjunto dos Números Racionais (Q)

O conjunto dos números racionais é representado por Q. Reúne todos os números que podem ser escritos na forma p/q, sendo p e q números inteiros e $q \neq 0$.

Q = {0, ±1, ±1/2, ±1/3, ..., ±2, ±2/3, ±2/5, ..., ±3, ±3/2, ±3/4, ...}

Note que todo número inteiro é também número racional. Assim, Z é um subconjunto de Q.

Subconjuntos dos Números Racionais

Q^* = subconjunto dos números racionais não nulos, formado pelos números racionais sem o zero.

Q_+ = subconjunto dos números racionais não negativos, formado pelos números racionais positivos e o zero.

Q^*_+ = subconjunto dos números racionais positivos, formado pelos números racionais positivos, sem o zero.

Q_- = subconjunto dos números racionais não positivos, formado pelos números racionais negativos e o zero.

Q^*_- = subconjunto dos números racionais negativos, formado números racionais negativos, sem o zero.

Conjunto dos Números Irracionais (I)

O conjunto dos números irracionais é representado por I. Reúne os números decimais não exatos com uma representação infinita e não periódica, por exemplo: 3,141592... ou 1,203040...

Importante ressaltar que as dízimas periódicas são números racionais e não irracionais. Elas são números decimais que se repetem após a vírgula, por exemplo: 1,3333333...

Conjunto dos Números Reais (R)

O conjunto dos números reais é representado por R. Esse conjunto é formado pelos números racionais (Q) e irracionais (I). Assim, temos que $R = Q \cup I$. Além disso, N, Z, Q e I são subconjuntos de R.

Mas, observe que se um número real é racional, ele não pode ser também irracional. Da mesma maneira, se ele é irracional, não é racional.

Subconjuntos dos Números Reais

$R^* = \{x \in R \mid x \neq 0\}$: conjunto dos números reais não nulos.

$R_+ = \{x \in R \mid x \geq 0\}$: conjunto dos números reais não negativos.

$R^*_+ = \{x \in R \mid x > 0\}$: conjunto dos números reais positivos.

$R_- = \{x \in R \mid x \leq 0\}$: conjunto dos números reais não positivos.

$R^*_- = \{x \in R \mid x < 0\}$: conjunto dos números reais negativos.

Conjunto dos números complexos (C)

Os números complexos formam um conjunto numérico que é mais abrangente que os números reais. Eles surgiram após inúmeros estudos, sobretudo após tentativas de se resolver equações do segundo e do terceiro grau. Nessa época, os matemáticos se depararam raízes quadradas de números negativos, que não podem ser expressas no conjunto dos números reais. Assim, os matemáticos passaram a denotar essas raízes usando a letra “i”. A base principal foi adotar $i = \sqrt{-1}$.

Quando vamos solucionar equações do tipo $x^2 + 1 = 0$, nos deparamos com $x = \pm\sqrt{-1}$. Como não existe raiz quadrada de número negativo no conjunto dos números reais, convencionou-se utilizar a notação $i^2 = -1$ para representar esse número negativo. Com isso, o resultado da equação anterior seria $x = \pm i$. Esse número “i” é conhecido como unidade imaginária**.**

Assim, um número complexo, que chamamos de z, tem a forma

$$z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$$

Chamamos o número **a** de parte real, Re(z) = a, e **b** de parte imaginária, Im(z) = b. Esta notação é chamada de forma algébrica.

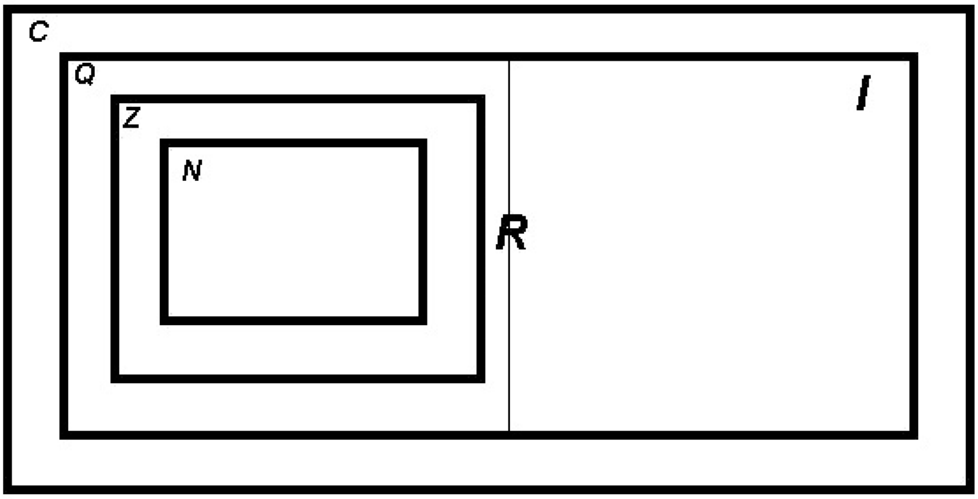


Figura 18: Diagrama de Venn para os conjuntos numéricos. Fonte: Brasil Escola.

3. Considerações importantes e casos especiais de conjuntos (10 min)

Vamos mostrar aos alunos alguns casos particulares de conjuntos e conceitos básicos que é de grande valia durante o seu estudo, antes disso devemos lembrar que ao se referir a um conjunto devemos ter em mente uma série de símbolos e entender seu significado. Nesse ponto é importante saber que vamos denotar um conjunto qualquer por uma letra maiúscula [A, B, C... Z] e ainda que os elementos do conjunto em questão vão aparecer entre chaves, {a, b, c...}. Exemplo A= {a, b, c, d}.

- *Conjunto vazio:* Se referimos como conjunto vazio, a aquele que não possui elementos. Exemplificando A= {x| x é um número primo positivo e menor do que 2}.
- *Conjunto unitário:* Chama-se conjunto unitário todo e qualquer conjunto que é formado por um único elemento. Como por exemplo A= {x| x é um número primo par e positivo}.
- *Subconjunto:* Dado A um conjunto qualquer, nomeia-se subconjunto de A todos os conjuntos que podem ser obtidos através de alguma propriedade ou característica, aplicada sobre o conjunto universo A. É importante lembrar todos os elementos que compõem cada um dos subconjuntos de A, estejam contidos em A.
- *Conjunto universo:* Dado B um subconjunto de A, onde B foi obtido através de uma propriedade particular *p* aplicada sobre o conjunto A, chama-se A de conjunto Universo (U), ou seja, o conjunto universo é o conjunto inicial, ou conjunto de partida.

- *Igualdade de conjuntos:* Dois conjuntos A e B, são ditos iguais se, e somente se, eles possuírem os mesmos elementos, indicamos A=B quando A e B são iguais.

4. Aplicação de exercício referente à definição (10 min)

Entregaremos aos alunos o material do aluno e pediremos que resolvam o exercício 1 para posteriormente corrigirmos.

5. Operações com conjuntos (25 min)

Antes de começar a operar com os conjuntos, devemos definir algumas simbologias que virão a ser utilizadas durante esse processo.

Símbolo	Nome	Explicação
{ , }	Chaves	Usado para apresentar um conjunto. Ex: {*a*,*b*,*c*} representa o conjunto composto por *a*, *b* e *c*.
{ } ou Ø	conjunto vazio	Significa que o conjunto não tem elementos, é um conjunto vazio. Ex: A={1,2,3} B={4,5,6} $A \cap B = \{\}$
∈	Pertence	Indica relação de pertinência. Ex: 5 ∈ N. Significa que o 5 pertence aos números naturais.
∉	não pertence	Não pertence. Ex: -1 ∉ N. Significa que o número -1 não pertence aos números naturais.
∃	Existe	Indica existência. Ex: ∃ **x** ∈ Z | x > 3

		Significa que existe um x pertencente ao conjunto dos números inteiros tal que x é maior que 3.
$\subset$	está contido	Ex: N $\subset$ Z, ou seja, o conjunto dos números naturais está contido no conjunto dos números inteiros.
$\not\subset$	não está contido	Ex: R $\not\subset$ N, ou seja, o conjunto dos números reais não está contido no conjunto dos números naturais.
$\supset$	Contém	Ex: Z $\supset$ N, ou seja, o conjunto dos números inteiros contém o conjunto dos números naturais.

Quadro 2: Simbologias dos conjuntos.

Vamos enunciar agora as operações que são possíveis quando trabalhamos com conjuntos numéricos.

A+B	Soma de conjuntos	Lê-se como "soma de A e B" É o conjunto de todos os elementos que pertencem ao conjunto A e B. Ex: A+B = $\{X \mid x \in A \; ou \; x \; \in B\}$

Quadro 3: Soma de conjuntos.

A - B	Diferença de conjuntos	Lê-se como "diferença de A com B". É o conjunto de todos os elementos que pertencem ao conjunto A **e não** pertencem ao conjunto B. Ex: A-B = {X | x ∈ A e x ∉ B}

Quadro 4: Subtração ou diferença de conjuntos.

A ∪ B	União de conjuntos	Lê-se como "A união B" Ex:

		A={5,7,10} B={3,6,7,8} A ∪ B = {3,5,6,7,8,10}

Quadro 5: União de conjuntos.

A ∩ B	intersecção de conjuntos	Lê-se como "A intersecção B" <u>Ex</u>: A={1,3,5,7,8,10} B={2,3,6,7,8} A ∩ B={3,7,8}

Quadro 6: Intersecção de conjuntos.

6. <u>Aplicação de exercícios referente a conjuntos (10 min)</u>

Pediremos aos alunos que resolvam o exercício 2 do material do aluno, referente as operações acima explicadas.

7. <u>Intervalo</u>

8. <u>Introdução e Formalização de função (40 min)</u>

Após o retorno do intervalo, apresentaremos algumas definições da composição de uma relação e posteriormente definiremos função da seguinte forma:

Par ordenado: Indicamos por (x, y) o par ordenado formado pelos elementos x e y, onde x é o 1º elemento e y é o 2º elemento.

Plano cartesiano: Considere dois eixos *x* e *y* perpendiculares em 0, os quais determinam o plano ∝.

Temos o eixo das abscissas (*eixo x*), o eixo das ordenadas (*eixo y*) e que a origem do sistema é o ponto 0.

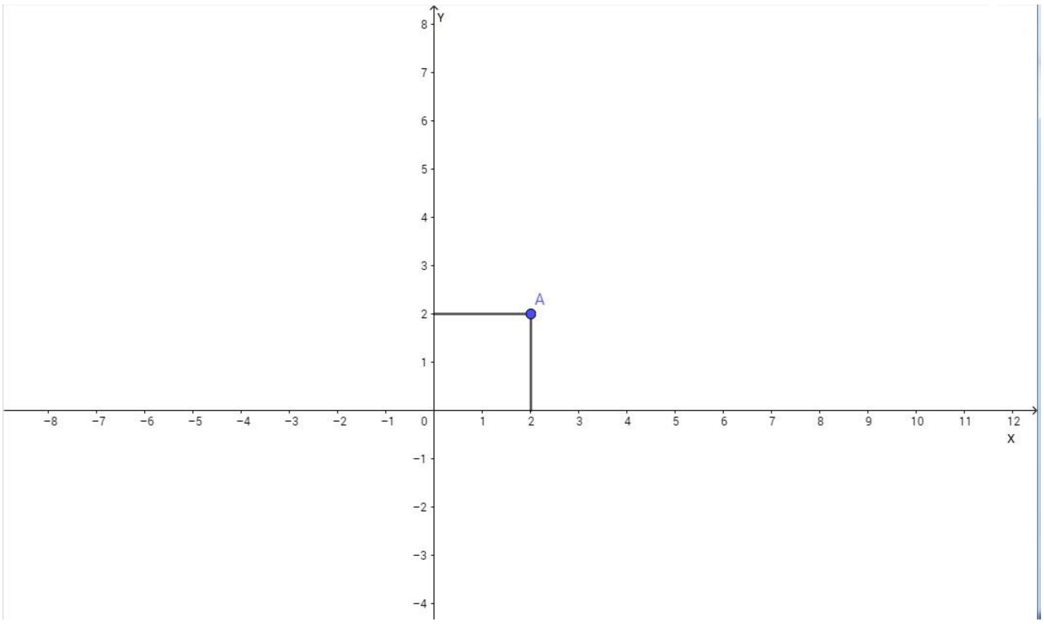


Figura 19: Representação de um par ordenado A no plano cartesiano. Fonte: Geogebra.

Produto Cartesiano: Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Denominamos produto cartesiano de A por B o conjunto AxB cujos elementos são todos pares ordenados (*x*,*y*), em que o primeiro elemento pertence a A e o segundo elemento pertence a B.

$$AxB = \{(x,y)|\ x \in A \text{ e } y \in B\}$$

Relação: Considere um conjunto A={2,3,4} e B={2,3,4,5,6}

A relação R={(x,y) ∈ AxB| x/y}

R= {(2,2), (2,4), (2,6),(3,3), (3,6), (4,4)}

R é chamado relação entre os elementos de A e de B ou, simplesmente, uma relação binária de A em B.

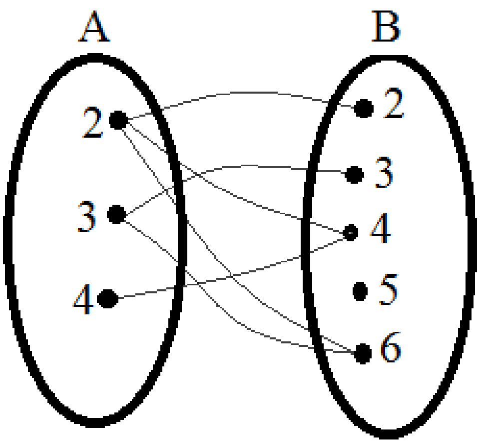


Figura 20: Diagrama da relação R. Fonte: Brasil Escola.

Definição de função: Dados dois conjuntos A e B não vazios, uma *função f de A em B* é uma relação que associa a cada elemento $x \in A$, um único elemento $y \in B$. Assim, uma função liga um elemento do domínio (conjunto A de valores de entrada) com um segundo conjunto, o contradomínio (conjunto B de valores de saída) de tal forma que a cada elemento do domínio está associado exatamente a um e somente um elemento do contradomínio. O conjunto dos elementos do contradomínio que são relacionados pela f a algum x do domínio é denominado o conjunto imagem, denotado por Im(f).

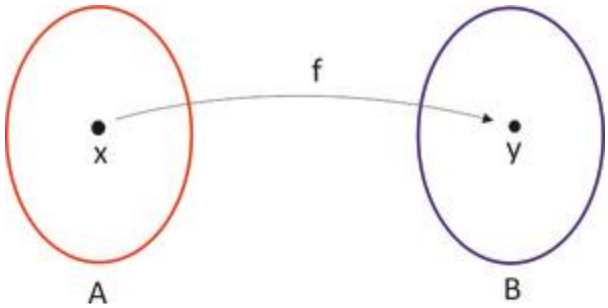


Figura 21: Representação de uma função f de A em B. Fonte: Brasil Escola.

Domínio

Dada a função f de A em B, definida como y = f(x), seu domínio é o conjunto A e um elemento qualquer de A, representado pela letra x, é chamado variável independente.

Contradomínio

Dada a função f de A em B, definida como y = f(x), o conjunto B é chamado contradomínio. A definição de função garante que cada elemento do domínio (conjunto A) é relacionado a um único elemento do contradomínio (conjunto B). Note que a palavra "cada" garante que todos os elementos do domínio são usados em uma função, mas a expressão "um único elemento do conjunto B" não garante que todos os elementos do contradomínio serão relacionados a elementos do domínio.

Imagem

O conjunto imagem é formado por todos os elementos do contradomínio que estão relacionados a algum elemento do domínio.

Função Sobrejetora

Uma função é sobrejetora se, e somente se, o seu conjunto imagem for especificadamente igual ao contradomínio, Im = B. Por exemplo, se temos uma função f : Z→Z definida por y = x +1 ela é sobrejetora, pois Im = Z.

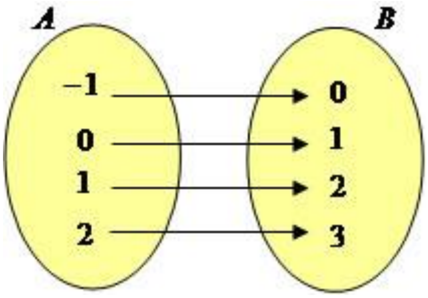


Figura 22: Representação de uma função sobrejetora. Fonte: Brasil Escola.

Função Injetora

Uma função é injetora se os elementos distintos do domínio tiverem imagens distintas. Por exemplo, dada a função f : A→B, tal que f(x) = 3x.

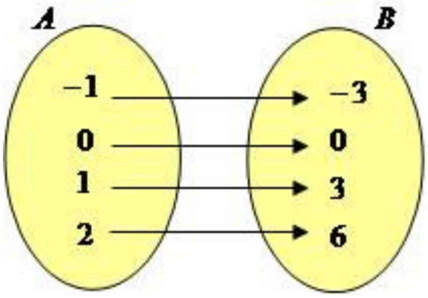


Figura 23:Representação de uma função injetora. Fonte: Brasil Escola.

Função Bijetora

Uma função é bijetora se ela é injetora e sobrejetora. Por exemplo, a função f : A→B, tal que f(x) = 5x + 4.

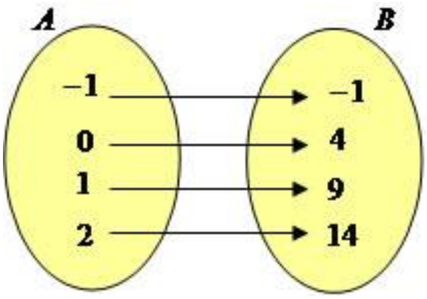


Figura 24: Representação de uma função bijetora. Fonte:Brasil Escola.

Note que ela é injetora, pois $x1 \neq x2$ implica em $f(x1) \neq f(x2)$
É sobrejetora, pois para cada elemento em B existe pelos menos um em A, tal que f(x)=y.

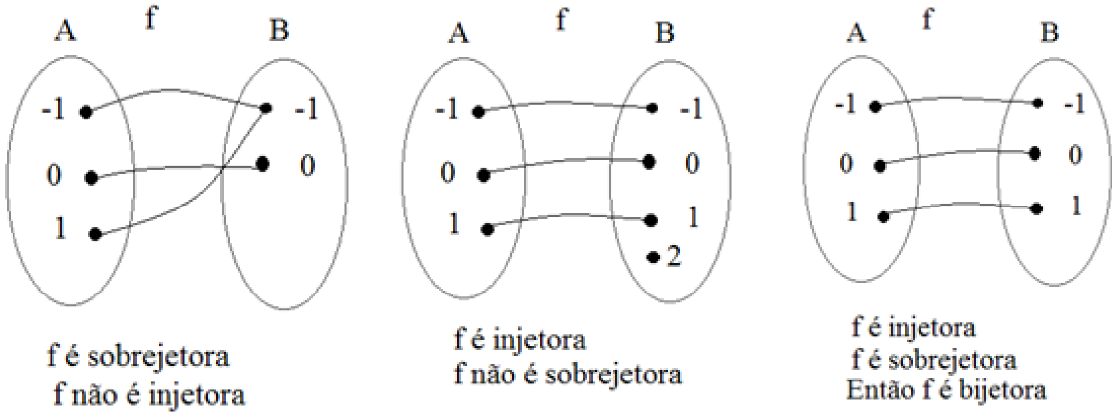


Figura 25: Diagramas de casos de funções. Fonte: Brasil Escola.

9. Exercícios (20 min)

Pediremos aos alunos que resolvam os exercícios 3 e 4 do material do aluno, para posteriormente corrigirmos com eles.

10. Exercícios do material do aluno (30 min)

Pediremos para que os alunos resolvam os exercícios do material do aluno, enquanto passamos pela sala auxiliando os mesmos.

11. Esclarecimento das Principais dúvidas (10 min)

Neste momento da aula iremos relembrar os principais pontos e ver se existem duvidas referentes à aula, pois este conteúdo será importante para as próximas aulas.

Avaliação:

A dinâmica inicial será uma breve avaliação do conceito que eles já possuem sobre conjuntos numéricos, então ao decorrer da aula os avaliaremos observando o progresso que eles tiverem.

Referências:

IEZZI, Gelson. **Matemática e realidade:** 7° série. 4. ed reform. São Paulo: Atual, 2000.

BARROSO, Juliane M. **Projeto Araribá:** Matemática. São Paulo: Moderna, 2006.

GUELLI, Oscar. **Matemática:** uma aventura do pensamento. São Paulo: Ática, 1999.
IMENES & LELLIS. **Matemática**. São Paulo: Scipione, 1997.
EXERCICIO INTRODUÇÃO A FUNÇÃO. **Exercícios sobre introdução a função**. Disponível em: https://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-exercicios-sobre-introducao-funcao.htm. Acesso em: 20 maio 2018.
EXERCICIOS SOBRE CONJUNTOS. **Exercícios sobre operações com conjuntos**. Disponível em: https://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-operacoes-com-conjuntos.htm. Acesso em: 23 maio 2018.
EXERCICIOS SOBRE CONJUNTOS. **Exercícios – Conjuntos numéricos**. Disponível em: https://www.infoescola.com/matematica/conjuntos-numericos/exercicios/. Acesso em: 23 maio 2018.

2.4.1.1 Material do aluno

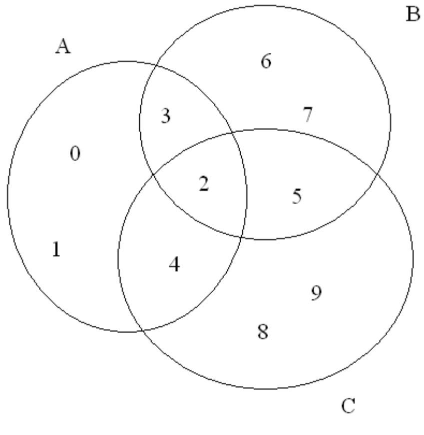
MATERIAL DO ALUNO 5° ENCONTRO

1 - (PUC-RIO 2010) Sejam x e y números tais que os conjuntos {0, 7, 1} e {x, y, 1} são iguais. Então, podemos afirmar que:

a) x=0 e y=5
b) x+y=7
c) x=0 e y=1
d) x+2y=7
e) x=y

Escolha sua resposta e justifique.

2 - Observe o diagrama e responda:



Quais os elementos dos conjuntos abaixo:

a) A =

b) B =

c) C =

d) (A-B)+C =

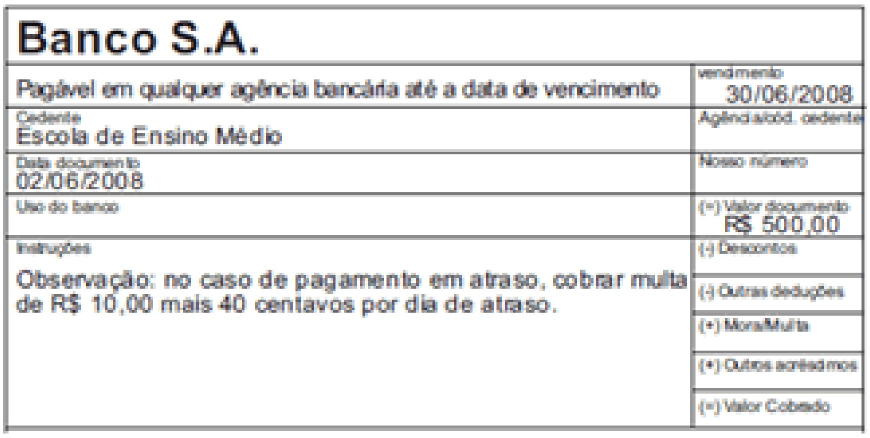
e) (A+B) ∩ (C+B)=

f) (A∩B) ∪ (B∩C) =

g) (A∩C)∪B =

3 - Dados **A** = {0, 1, 2, 3}, **B** = {-1, 0, 1} e a correspondência entre **A** e **B** dada por: y = x – 2, com x∈**A** e y∈**B**, faça um diagrama e diga se **f** é uma função de **A** em **B**.

4 - **(Enem–2008–Adaptado)** A figura abaixo representa o boleto de cobrança da mensalidade de uma escola referente ao mês de junho de 2008.



Banco S.A.	
Pagável em qualquer agência bancária até a data de vencimento	vencimento 30/06/2008
Cedente Escola de Ensino Médio	Agência/cód. cedente
Data documento 02/06/2008	Nosso número
Uso do banco	(=) Valor documento R$ 500,00
Instruções Observação: no caso de pagamento em atraso, cobrar multa de R$ 10,00 mais 40 centavos por dia de atraso.	(-) Descontos
	(-) Outras deduções
	(+) Mora/Multa
	(+) Outros acréscimos
	(=) Valor Cobrado

Temos que M(x) é o valor, em reais, da mensalidade a ser paga, e x é o número de dias em atraso. Determine a função que oferece o valor do boleto para pagamento com atraso, e calcule o valor de uma mensalidade com 12 dias de atraso.

5 - (ENEM) No dia 17 de Maio passado, houve uma campanha de doação de sangue em uma Universidade. Sabemos que o sangue das pessoas pode ser classificado em quatro tipos quanto a antígenos. Uma pesquisa feita com um grupo de 100 alunos da Universidade constatou que 42 deles têm o antígeno A, 36 têm o antígeno B e 12 o antígeno AB. Sendo assim, qual o número de alunos cujo sangue tem antígeno O?

6 - (UFSE) Os senhores A, B e C concorriam à liderança de certo partido político. Para escolher o líder, cada eleitor votou apenas em dois candidatos de sua preferência. Houve 100 votos para A e B, 80 votos para B e C e 20 votos para A e C. Sendo assim qual dos candidatos obteve o maior número de votos?

7 - O dono de um canil vacinou todos os seus cães, sendo que 80% contra parvovirose e 60% contra cinomose. Determine o porcentual de animais que foram vacinados contra as duas doenças.

8 - Em uma prova discursiva de álgebra com apenas duas questões, 470 alunos acertaram somente uma das questões e 260 acertaram a segunda. Sendo que 90 alunos acertaram as duas e 210 alunos erraram a primeira questão. Quantos alunos fizeram a prova?

9 - O preço a ser pago por uma corrida de táxi inclui uma parcela fixa de R$ 6,00, denominada bandeirada mais uma parcela variável de R$ 0,90 por km rodado.

Determine:

a) A função que representa o preço **P** de uma corrida em função de **x** quilômetros rodados.

b) O preço de uma corrida de 12 km.

c) A distancia percorrida por um passageiro que pagou R$ 96,00 pela corrida.

10 - A empresa de telefonia celular ABC oferece um plano mensal para seus clientes com as seguintes características:

Para um total de ligações de até 50 minutos, o cliente paga um valor fixo de R$40,00;

Se os 50 minutos forem excedidos, cada minuto de excesso será cobrado pelo valor de R$1,50 (além dos R$40,00 fixos).

a) Determine o valor pago por um cliente que utilizou o celular por 74 minutos em certo mês.

b) Em certo mês, utilizando o plano descrito acima, o valor a ser pago por um cliente foi de R$101,50. Determine quantos minutos foram utilizados nesse mês.

11 - Em uma cidade, os impostos que incidem sobre o consumo de energia elétrica residencial são de 30% sobre o custo do consumo mensal. O valor total da conta a ser paga no mês é o valor cobrado pelo consumo acrescido dos impostos. Considerando *x* o

valor total da conta mensal de uma determinada residência e *y* o valor dos impostos, qual é a expressão algébrica que relaciona *x* e *y*?

12 - O prefeito de uma cidade deseja construir uma rodovia para dar acesso a outro município. Para isso, foi aberta uma licitação na qual concorreram duas empresas. A primeira cobrou R$ 100 000,00 por km construído (**n**), acrescidos de um valor fixo de R$ 350 000,00, enquanto a segunda cobrou R$ 120 000,00 por km construído (**n**), acrescidos de um valor fixo de R$ 150 000,00. As duas empresas apresentam o mesmo padrão de qualidade dos serviços prestados, mas apenas uma delas poderá ser contratada.
Do ponto de vista econômico, qual equação possibilitaria encontrar a extensão da rodovia que tornaria indiferente para a prefeitura escolher qualquer uma das propostas apresentadas?

2.4.1.2 Relato da aula

Para o dia 09 de junho de 2018 estava previsto o quinto encontro do Promat. Às 8 horas da manhã do dia em questão estavam presentes apenas 15 estudantes, o número de alunos veio decaindo nos últimos encontros, fatores como o clima, os feriados e greves contribuíram para com esse fator. A aula foi iniciada no horário determinado, iniciamos retomando os conteúdos trabalhados no encontro anterior, questionando os alunos sobre as possíveis dúvidas que poderiam surgir a partir da resolução da lista de exercícios, como nenhum questionamento nos foi direcionado, ressaltamos os principais pontos da aula de equações e demos início a aula que tinha como principal tópico o conteúdo de conjuntos numéricos.

Tínhamos planejado para o início da aula uma dinâmica do lado de fora da sala de aula, onde seria desenhado um diagrama no chão e entregue a cada aluno um número diferente, os alunos deveriam achar o conjunto correspondente ao número que cada um possuía e se posicionar em cima do conjunto, como a manhã era muito fria, a dinâmica foi adaptada ao uso do quadro negro, o diagrama foi desenhado ao quadro e os alunos escreveram seus números dentro do conjunto correspondente. Este momento nos desnorteou um pouco pois a maioria dos alunos posicionou seu número em um local não adequado, passando a sensação de que eles não conheciam os conjuntos numéricos e os números que pertencem a eles.

Continuamos a aula a partir desta dificuldade que surgiu, passamos aos alunos as breves definições de cada conjunto numérico, sempre buscando enfatizar exemplos, depois desta explicação contamos com o auxílio dos alunos para corrigir o diagrama preenchido por eles, reordenando os números e os escrevendo em seus devidos lugares, a partir daí nossos alunos mostraram ter entendido o conceito de conjuntos, e conseguiram aplica-lo no momento destinado a resolução de exercícios.

Uma parte da aula foi destinada a explicação de casos particulares de conjuntos, dentre os casos estavam o conjunto vazio, universo, unitário e alguns outros. Os alunos por sua vez tiveram certa dificuldade em compreender o conceito de conjunto universo, buscamos então exemplificar ao máximo a situação e utilizar de desenhos e notações para basear a explicação, que teve resultado positivo no final. Neste mesmo instante iniciou-se uma explicação sobre operações com conjuntos, tratamos de união, interseção, subtração e soma de conjuntos, este último nos gerou um problema, em nosso plano definimos soma sendo a mesma coisa que a união, mas durante a explicação mostramos a soma, como a união dos conjuntos com repetição dos elementos em comum, no intervalo buscamos auxílio com os professores, e fomos esclarecidos de que não estávamos errados, mas tratamos a soma como a união de conjuntos, na volta do intervalo informamos aos alunos o ocorrido e mostramos a eles a nova explicação como no plano, buscando sanar dúvidas que poderiam ter surgido.

A aula deste encontro tinha como tópico de estudo ainda, uma introdução ao conceito de funções, explicamos aos alunos como se dá o conceito de par ordenado, de plano cartesiano e mostramos como localizar os pontos sobre o plano, mostramos ainda o que é uma relação sobre conjuntos. A partir da exemplificação de cada um dos termos, buscamos esclarecer ao máximo esses conceitos que serão relembrados no início da próxima aula já que são pontos importantes do nosso estudo. Falou-se ainda sobre injetividade e sobrejetividade, explicamos esses pontos através do diagrama de flechas, este momento trouxe uma série de dúvidas nos alunos pois este é um conceito importante e de certa complexibilidade, com alguma dificuldade conseguiu-se explicar estes conceitos e definir a bijetividade de uma função. Por fim falamos sobre notação para funções, utilizamos a notação geral de função e outro exemplo particular, para esclarecer esse ponto, o qual teve boa compreensão por parte dos estudantes.

Antes de encerrar a aula entregamos uma lista de exercícios, a qual os alunos deveriam iniciar a resolução em sala e terminar em casa, falamos brevemente o que iria ser abordado no próximo encontro e encerramos a aula.

2.4.2 Plano de aula 16/06/2018

6º ENCONTRO

Público-Alvo:

Alunos do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

Objetivo Geral:

Compreender o conceito de função afim bem como realizar operações envolvendo tal conteúdo.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com Função afim, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Compreender o conceito função afim (1°grau);
- Reconhecer o gráfico da função afim;
- Encontrar a lei de formação de uma função;
- Conhecer os tipos de funções afim;
- Apreender a encontrar a raiz (ou zero) da função afim;
- Resolver exercícios que envolvam o conteúdo.

Conteúdo: Função afim (1°grau).

Recursos Didáticos: Quadro, giz, lista de exercício, projetor, Geogebra, canudinho.

Encaminhamento metodológico:

1. Principais pontos da aula anterior (15 min)

Iniciaremos a aula retomando brevemente o conteúdo de funções do encontro anterior.

Relação: Considere um conjunto A={2,3,4} e B={2,3,4,5,6}

A relação R={(x,y) ∈ AxB| x/y}

R= {(2,2), (2,4), (2,6),(3,3), (3,6), (4,4)}

R é chamado relação entre os elementos de A e de B ou, simplesmente, uma relação binária de A em B.

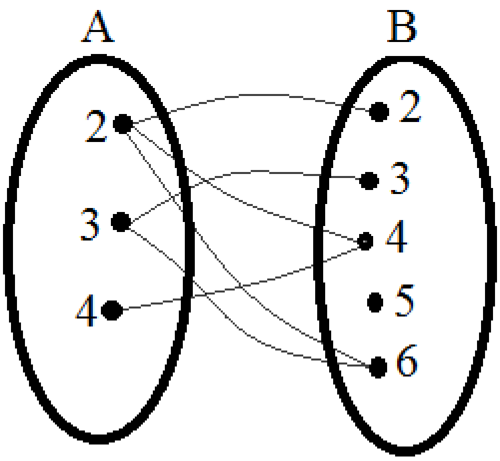


Figura 26: Diagrama da relação R. Fonte: Brasil Escola.

Funções: Definimos funções sendo uma relação entre dois conjuntos A e B (Sendo A domínio da função e B contradomínio), dada por uma lei de formação, que associa a cada x ∈ A um y ∈ B.

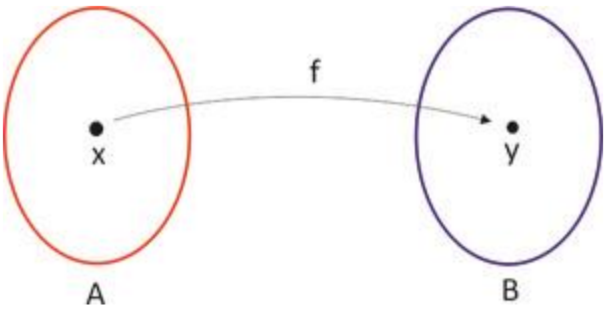


Figura 27: Representação de uma função f de A em B. Fonte: Brasil Escola.

Em uma função teremos os seguintes elementos:

Domínio (D): conjunto de partida de uma função (elemento x)

Contradomínio (C): conjunto dos elementos y.

Imagem (Im): Subconjunto do contradomínio, composta pelos elementos y que estão relacionados com algum elemento x do domínio.

Relembraremos também as características dos três tipos de funções apresentadas.

Função injetora: Os elementos do domínio possuem imagens distintas. Ex: f(a) ≠ f(b).

Função sobrejetora: O conjunto imagem é igual ao conjunto do contradomínio. Im=C

Função bijetora: Se e somente se, os elementos do domínio possuem imagens distintas e o conjunto imagem é igual ao conjunto do contradomínio.

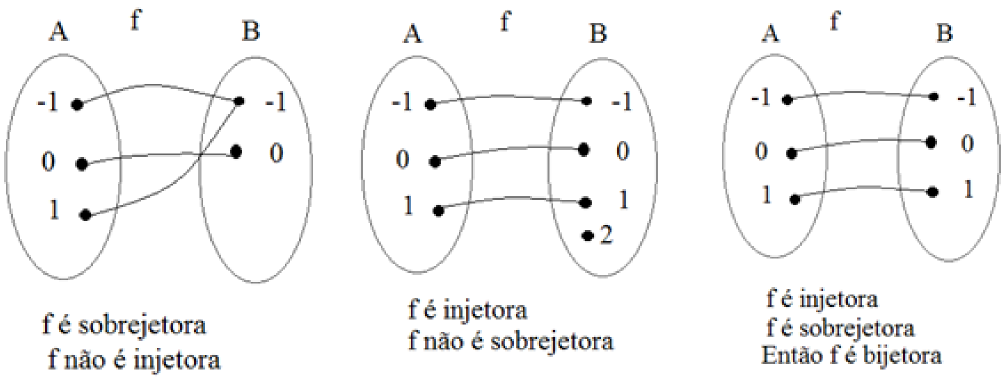


Figura 28: Diagramas de casos de funções. Fonte: Brasil Escola.

2. <u>Ponto importante de introdução de funções (5 min)</u>

Notação de funções:

Sendo uma função de A em B, com A sendo seu domínio e B seu contradomínio, teremos:

$x \in A$ e $y \in B$ com a seguinte lei $y = f(x)$

Denotaremos da seguinte maneira:

$f: A \to B |\ x \to f(x)$

3. <u>Prática para introdução do conteúdo (20 min)</u>

A seguir utilizaremos uma atividade para introduzirmos o conceito de função afim.

A atividade será a construção de figuras geométricas adjacentes usando canudinhos. Entregaremos aos alunos alguns canudinhos e pediremos para que eles construam triângulos adjacentes, da maneira exemplificada abaixo e, em seguida, pediremos para que eles completem o quadro e respondam os itens da sequência:

Atividade:

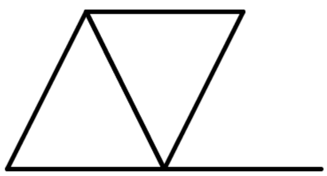


Figura 29: Exemplo de como construir os triângulos. Fonte: Os Autores.

Triângulos	**Canudos**

Quadro 7: Quantidade de canudos para construir triângulos.

a) Se quiséssemos construir 20 triângulos quantos canudos iríamos usar? Para 50 triângulos? E para 157?

b) Se dispusemos de 50 canudos quantos triângulos poderíamos formar? E sobrariam canudos? E para 123 e 200 canudos?

c) Encontre uma expressão matemática que relacione o número n de canudinhos usados para construir t triângulos.

d) A partir dos dados encontrados anteriormente, esboce o gráfico da função.

Daremos algum tempo para que eles realizem a atividade, depois iremos corrigir no quadro. Faremos perguntas acerca dos valores que n pode assumir, já que não podemos usar metade de um canudo na atividade.

4. <u>Definição do conteúdo (15 min)</u>

Em seguida, definiremos o conceito de função afim, suas aplicações, representação gráfica e apresentaremos um exemplo, para que a definição fique mais clara para os alunos.

Definição

Chama-se função polinomial do 1º grau, ou função afim, a qualquer função f de IR em IR dada por uma lei da forma $f(x) = ax + b$, onde a e b são números reais dados e $a \neq 0$.

Exemplos de funções polinomiais do 1º grau:

$f(x) = 5x - 3$, onde a = 5 e b = - 3

$f(x) = -2x - 7$, onde a = -2 e b = - 7

$f(x) = 11x$, onde a = 11 e b = 0

Depois de apresentarmos o ultimo exemplo onde b=0, questionaremos os alunos sobre essa peculiaridade e se eles sabem que esta se qualifica uma função linear.

Gráfico de uma função afim

O gráfico de uma função afim (1° grau), $y = ax + b$, com $a \neq 0$, é uma reta. Por exemplo, vamos construir o gráfico da função $y = 3x - 1$:

Como o gráfico é uma reta, basta obter dois de seus pontos e ligá-los com o auxílio de uma régua:

a) Para $x = 0$, temos $y = 3 * 0 - 1 = -1$; portanto, um ponto é (0, -1).

b) Para $y = 0$, temos $0 = 3x - 1$; portanto, $x = \frac{1}{3}$ e outro ponto é $(\frac{1}{3}, 0)$.

Marcamos os pontos (0, -1) e $(\frac{1}{3}, 0)$ no plano cartesiano e ligamos os dois com uma reta.

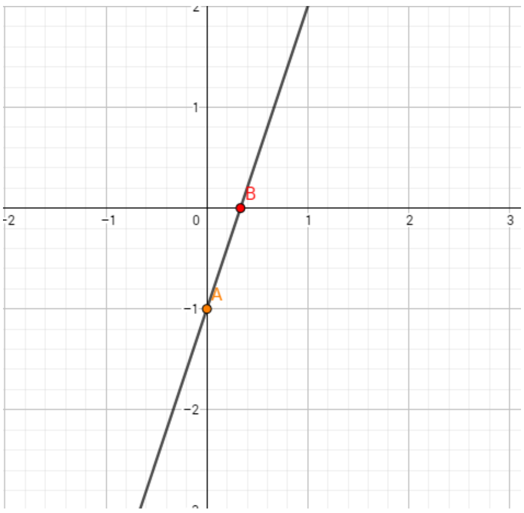


Figura 30: Representação do gráfico de uma função afim. Fonte: Geogebra.

x	***y***
0	-1
$\mathbf{\frac{1}{3}}$	0

Quadro 8: Pontos da função afim.

O coeficiente de *x*, **a**, que é chamado **coeficiente angular da reta** e está ligado diretamente à inclinação da reta em relação ao eixo O*x*.

O termo constante, **b**, é chamado coeficiente linear da reta. Para x = 0, temos *y* = b. Assim, o coeficiente linear determina o deslocamento da reta em relação a origem, é a ordenada do ponto em que a reta corta o eixo O*y*.

Apresentaremos a relação do coeficiente com a reta, através do Geogebra, para que os alunos observem as mudanças.

5. <u>Como encontrar a equação de uma função (5 min)</u>

Neste tópico apresentaremos aos alunos como encontrar a equação de uma função afim a partir de dois pontos.

Temos que a reta da função afim é da forma ax+b=0

Então primeiramente utilizaremos a seguinte formula:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y2 - y1}{x2 - x1}$$

Sendo 1 e 2 os dois pontos que temos da reta e **m** o coeficiente angular **a** da função.

Depois apenas substituímos o valor encontrado para **a** na equação e encontramos **b**, obtendo assim a equação da função.

6. <u>Exercício para fixação (15 min)</u>

Entregaremos o material do aluno e pediremos que resolvam os exercícios 1 e 2, que será corrigido em seguida.

7. <u>Tipos de Função afim (10 min)</u>

Uma função afim possui representação no plano cartesiano através de uma reta, podendo a função ser crescente ou decrescente o que determinará a posição da reta.

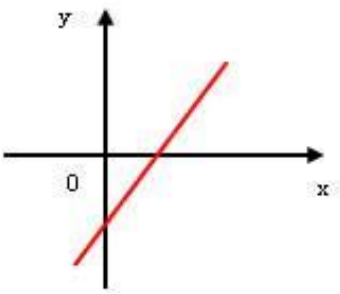


Figura 31: Função crescente (a > 0) (f(x) = x-1). Fonte: Núcleo EAD.

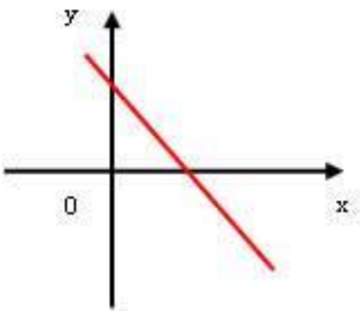


Figura 32: Função decrescente (a < 0) (f(x) = -x+1). Fonte: Núcleo EAD.

Temos também um caso especial de função, a função constante diferencia-se das funções do 1° grau pois não pode ser caracterizada como crescente ou decrescente, por isso, constante. Podemos afirmar que uma função constante é definida pela seguinte fórmula:

$$f(x) = c\,, c \in \mathbb{R}$$

Apresenta o seguinte gráfico:

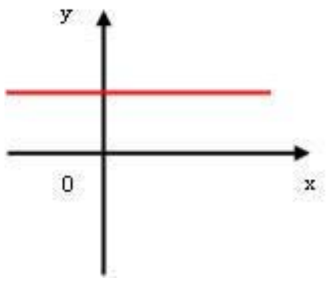


Figura 33: Função constante. Fonte: Núcleo EAD.

Apresentaremos os três tipos de funções acima no Geogebra.

8. Exercício para fixação (15 min)

Pediremos aos alunos que resolvam o exercício 3 e 4 do material do aluno, referente as funções acima explicadas.

9. Intervalo

10. Raiz de uma função afim (20 min)

Para determinarmos o zero ou a raiz de uma função afim basta considerarmos f(x) = 0 ou y = 0. Raiz ou zero da função é o instante em que a reta corta o eixo x.

f(x) = ax + b

f(x) = 0

ax + b = 0

ax = – b

x = – (b/a)

Exemplo 1

Obtendo a raiz da função f(x) = 3x – 6

3x – 6 = 0

3x = 6

x = 6/3

x = 2

A raiz da função é igual a 2.

Exemplo 2

Seja f uma função real definida pela lei de formação f(x) = 2x + 1. Qual é a raiz dessa função?

F(x) = 0

2x + 1 = 0

2x = –1

x = – 1/2

11. Exercício de fixação (15 min)

Pediremos aos alunos que resolvam o exercício 5 do material do aluno, referente a raiz de uma função afim acima explicada.

12. Jogo dominó das funções (25 min)

Conteúdo: Função Afim, Domínio, Imagem, zeros da função.

Objetivos: utilizar o jogo como recurso para o estudo e revisão do conteúdo de funções.

Organização: duplas de alunos

Material: jogo de cartas com 29 peças

Regras do Jogo:

- Os alunos jogarão em duplas
- O jogo contém 15 peças que serão divididas entre a dupla.
- Cada aluno da dupla receberá um total de 7 peças.
- A peça restante inicia o jogo.
- Cada peça contém dois lados, com perguntas ou respostas que se relacionam a outras peças e assim sucessivamente.
- A dupla decidira no par ou ímpar quem começará.
- O aluno que começar deve verificar se possui entre suas peças aquela que se encaixa na peça que começou o jogo seja ela a pergunta ou a resposta. Caso não possua entre suas peças aquela que se encaixa em qualquer um dos lados daquela que foi colocada, a dupla passará a vez para a outra.
- Ganha o jogo a dupla que primeiro terminar suas peças.

$f(x) = 2x + 1$	A raiz da função é 5

Quadro 9: Exemplo de peça do jogo.

13. Exercícios material do aluno (25 min)

Pediremos para que os alunos resolvam os exercícios do material do aluno, enquanto passamos pela sala auxiliando os mesmos.

14. Esclarecimento principais dúvidas e encerramento da aula (10 min)

Relembraremos os pontos importantes da aula, esclarecendo qualquer dúvida que tenha ficado e então encerraremos o 6° encontro.

Avaliação:

A avaliação ocorrera por meio da observação em sala de aula e também durante o jogo desenvolvido de funções.

Referências:

GUELLI, Oscar. **Matemática:** uma aventura do pensamento. São Paulo: Ática, 1999.

IMENES & LELLIS. **Matemática**. São Paulo: Scipione, 1997.

BARROSO, Juliane M. **Projeto Araribá:** Matemática. São Paulo: Moderna, 2006.

EXERCICIOS DE FIXAÇÃO FUNÇÃO AFIM. **Função e função afim**. Disponível em: http://disciplinas.nucleoead.com.br/complementos/monitoria/mon_cal_dif/pdf/funcao_afim.pdf. Acesso em: 09 Jun 2018.

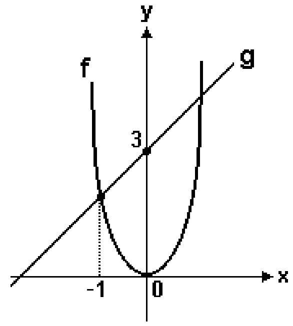
2.4.2.1 Material do aluno

MATERIAL DO ALUNO 6° ENCONTRO

1 - Faça os gráficos das seguintes funções:

a) $y = 2x + 3$ b) $y = -x$

2 - (Mackenzie) Na figura temos os gráficos das funções f e g. Se $f(x)=2x^2$, então quanto vale $g(3)$?



3 - (UFPI) A função real de variável real, definida por f (x) = (3 – 2a).x + 2, pode ser definida como crescente quando a variável **a** assume qual/quais valores?

4 - Determine k de modo que as funções abaixo sejam decrescentes:

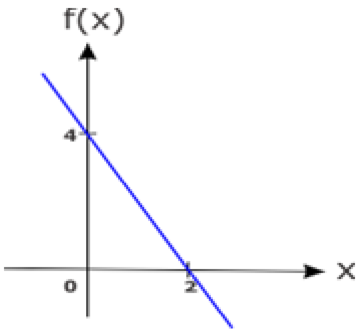
a) $y = (2k - 1)x + 21$ b) $y = -7 - (2k + 3)x$

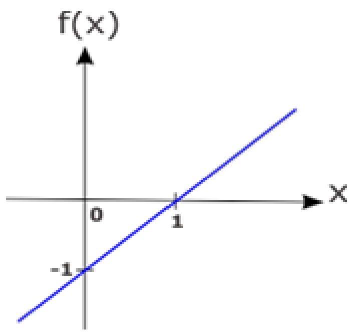
5 - Determine os zeros das funções a seguir:

a) y = 5x + 2 b) y = – 2x c) f(x) = $\frac{x}{2}$ + 4

6 - Complete: Uma função liga um ____________a um conjunto chamado ________________de tal forma que a cada elemento do ____________está associado exatamente um elemento do _______________. Além disso, a ______________é um subconjunto do ______________.

7 - Determine a lei da função para cada um dos gráficos a seguir:

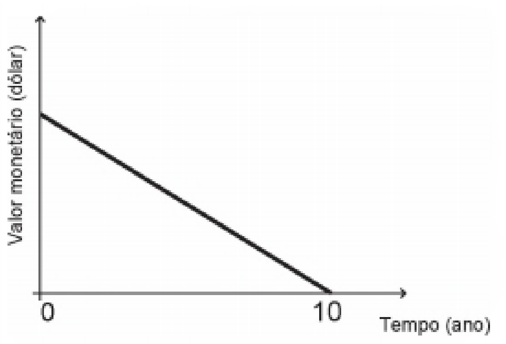




8 - (Cesgranrio) O valor de um carro novo é de R$9.000,00 e, com 4 anos de uso, é de R$4.000,00. Supondo que o preço caia com o tempo, segundo uma linha reta, encontre a função que justifica a queda do preço e o valor de um carro com 1 ano de uso?

9 - (ENEM-2014) Os sistemas de cobrança dos serviços de táxi nas cidades A e B são distintos. Uma corrida de táxi na cidade A é calculada pelo valor fixo da bandeirada, que é de R$ 3,45, mais R$ 2,05 por quilômetro rodado. Na cidade B, a corrida é calculada pelo valor fixo da bandeirada, que é de R$ 3,60, mais R$ 1,90 por quilômetro rodado.
Uma pessoa utilizou o serviço de táxi nas duas cidades para percorrer a mesma distância de 6 km. Qual o valor da diferença, em reais, entre as médias do custo por quilômetro rodado ao final das duas corridas?

10 - (ENEM 2017) Um sistema de depreciação linear, estabelecendo que após 10 anos o valor monetário de um bem será zero, é usado nas declarações de imposto de renda de alguns países. O gráfico ilustra essa situação.



Uma pessoa adquiriu dois bens, A e B, pagando 1200 e 900 dólares, respectivamente. Considerando as informações dadas, após 8 anos, qual será a diferença entre os valores monetários, em dólar, desses bens?

11 - Uma cidade é servida por duas empresas de telefonia. A empresa Telefone para todos cobra, por mês, uma assinatura de R$ 35,00 mais R$ 0,50 por minuto utilizado. A empresa Fale à vontade cobra, por mês, uma assinatura de R$ 26,00 mais R$ 0,65 por minuto utilizado. A partir de quantos minutos de utilização o plano da empresa Telefone para todos passa a ser mais vantajoso para os clientes do que o plano da empresa Fale à vontade?

12 - Duas pequenas fábricas de calçados, A e B, têm fabricado, respectivamente, 3000 e 1000 pares de sapatos por mês. Se, a partir de janeiro, a fábrica A aumentar sucessivamente a produção em 70 pares por mês e a fábrica B aumentar sucessivamente a produção em 290 pares por mês, a produção de B superará a produção de A a partir de qual mês do ano?

13 - Um grupo de estudantes fará uma excursão e alugará ônibus para transportá-los. A transportadora dispõe de ônibus em dois tamanhos, pequeno e grande. O pequeno tem

capacidade para 24 pessoas, ao custo total de R$ 500,00. O grande tem capacidade para 40 pessoas, ao custo total de R$ 800,00. Sabe-se que pelo menos 120 estudantes participarão da excursão e que o grupo não quer gastar mais do que R$ 4.000,00 com o aluguel dos ônibus.
Escreva as equações que relacionam o número de alunos com o número de ônibus usados na viagem, de acordo com as exigências do enunciado, enuncie ainda a quantidade de ônibus de tamanho pequeno e grande para que a viagem possa ser realizada nesses moldes.

14 - (Unirio) Sejam f e g funções tais que $f(x)=5x+2$ e $g(x)=-6x+7$. Determine a lei que define a função afim h, sabendo que $h(-5) = 1$ e que o gráfico de h passa pelo ponto de intersecção dos gráficos de f com g.

15 - Determine a função afim $f(x) = ax + b$, sabendo que $f(1) = 5$ e $f(–3) = –7$.

2.4.2.2 Relato da aula

Para o dia 16 de junho de 2018 estava previsto o sexto encontro do Promat, com início às 8 horas da manhã. Nesse dia em questão estavam presentes 12 estudantes. Trabalhamos nesse encontro com função do primeiro grau, ou função afim.

Antes de dar início ao conteúdo em si, tivemos de fazer uma revisão um pouco mais aprofundada do conteúdo anterior: diagrama de flechas, função injetora, função sobrejetora e função bijetora. Essa revisão foi necessária pois na aula passada os alunos nos passaram a sensação de não terem compreendido muito bem a explicação, visto que foi um pouco conturbada e realmente confusa. Porém, essa retomada foi de grande valia, pois, além de nós, estagiários, estarmos mais seguros da nossa explicação, alguns alunos que não estavam presentes no encontro passado puderam acompanhar a explicação e ter uma ideia do que foi abordado.

Após a revisão, aplicamos nossa atividade de introdução. A atividade consistia em formar triângulos com canudos e tentar achar um modelo para essa situação, de quantos canudos são necessários para formar um número qualquer de triângulos. Os alunos entenderam a ideia, porém tiveram uma certa dificuldade em realizá-la. Então, conforme as dúvidas na execução surgiam, auxiliávamos os alunos para saná-las. Por esse motivo, a atividade levou mais tempo do que tínhamos planejado. No entanto, ao final da atividade, percebemos que a mesma foi bem produtiva, sendo nosso objetivo atingido.

Depois de finalizada a atividade com os canudos, fomos para a parte teórica. Passamos a definição de função afim e a interpretação de seu gráfico. Nessa parte, percebemos que os alunos entenderam bem a explicação, não gerando perguntas e nem manifestando dúvidas. Mostramos também, depois da definição, como encontrar uma reta dados dois pontos, como encontrar seus coeficientes, angular e linear. Depois de explicados esses tópicos, pedimos aos alunos que resolvessem dois exercícios de fixação. As perguntas que surgiam eram relacionadas a interpretação e algumas, de encontrar certos pontos no plano cartesiano, mas a maioria dos alunos conseguiu chegar nas respostas corretas. Fizemos a correção dos exercícios no quadro e logo em seguida, todos saíram para o intervalo.

Terminado o intervalo, retomamos a aula explicando os tipos de função afim: crescente, decrescente e constante. Essa parte foi feita com auxílio de um controle deslizante no Geogebra, para que os alunos visualizassem melhor como o coeficiente angular altera o comportamento da reta e, com um controle deslizante no coeficiente linear, mostramos a relação deste com o gráfico da função, onde o valor do coeficiente linear é o ponto onde a reta corta o eixo das ordenadas. Após isso, os alunos entenderem a função dos coeficientes, os mesmos fizeram mais dois exercícios que posteriormente foram corrigidos no quadro.

Depois de corrigidos os exercícios, passamos a definição de raiz (ou zero) de uma função afim e como encontrá-la. Os alunos não tiveram muitos problemas de entendimento nessa parte, pois é uma característica fácil de ser interpretada e visualizada.

Como a atividade dos canudos ocupou muito tempo no início da aula, o tempo restante de aula não nos permitia aplicar o Dominó de Funções que tínhamos planejado de início. Então, deixamos para aplicar no início da aula seguinte, com o tempo restante deixamos os alunos resolverem os exercícios do material do aluno, enquanto passávamos auxiliando os mesmos em eventuais dúvidas.

Os alunos resolveram os exercícios até o final da aula e, no encerramento da mesma, demos uma pequena prévia da aula seguinte e frisamos que, por conta do tempo, deixamos o jogo do Dominó de Funções para a aula seguinte.

2.4.3. Plano de aula do dia 23/06/2018

7º ENCONTRO

<u>Público-Alvo:</u>

Alunos do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

Objetivo Geral:

Compreender as peculiaridades da função polinomial do segundo grau (quadrática) bem como solucionar exercícios envolvendo o conteúdo.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com funções polinomiais do segundo grau, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Compreender a lei de formação da função polinomial do segundo grau;
- Reconhecer o gráfico de uma função polinomial do segundo grau tal como suas peculiaridades;
- Encontrar a raiz de uma função quadrática por meio de diferentes métodos;
- Encontrar o vértice e a concavidade de uma função quadrática;
- Reconhecer o sinal de uma função quadrática;
- Construir o gráfico de uma função quadrática a partir de seus dados.

Conteúdo: Funções polinomiais do segundo grau (quadrática).

Recursos Didáticos: Quadro, giz, lista de exercícios, Geogebra.

Encaminhamento metodológico:

1. Revisão sobre o encontro anterior e atividade pratica (30 min)

Iniciaremos a aula questionando os alunos sobre o último encontro, buscando esclarecer eventuais dúvidas sobre as funções do primeiro grau, logo após realizaremos a atividade pratica, dominó de funções que havíamos planejado para o encontro anterior, mas que não houve tempo hábil para realiza-lo, sendo assim o utilizaremos para uma revisão do conteúdo.

2. Introdução do conteúdo (10 min)

Neste encontro iremos estudar detalhadamente as características da função polinomial do segundo grau com uma variável, ou simplesmente *função quadrática*.

Definição: A função F: $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por F(x)= $ax^2 + \text{bx} + \text{c}$, com a, b, e c reais sendo a ≠ 0, é chamada de função polinomial do segundo grau. Os números representados por a, b e c, são os coeficientes da função.

OBS: Se a = 0, temos uma função do primeiro grau ou ainda uma função constante se b também for 0.

Depois de apresentarmos a definição, relembraremos alguns pontos do 4º encontro, sobre como resolver equações do segundo grau.

3. <u>Cálculo da imagem dos pontos e pontos importantes para estudo do gráfico (10 min)</u>

Iremos agora mostrar aos alunos como encontrar a imagem correspondente aos números da reta real, encontrar a imagem de um ponto, que é aplicar o ponto desejado na função *F(x)* dada.

Exemplo: Dada *F(x)*= $x^2 + 2\text{x} - 2$, calcule *F(3) e F(0):*

Devemos substituir cada um dos pontos (3 *e 0*) no lugar do *x,* na função dada acima, logo:

*F(***3***)*= $\mathbf{3}^2 + 2.\mathbf{3} - 2$=*?*

*F(***3***)*= 9 + 6 – 2= ?

*F(***3***)*=13 .

Portanto a imagem do ponto 3 na função *F(x)* é 13.

Fazendo o mesmo com o ponto onde x=0 temos que a imagem de 0 é -2.

Após este encaminhamento para que os alunos tenham uma noção do gráfico desse tipo de função, basta calculando mais imagens e marcar seus pontos em um plano cartesiano.

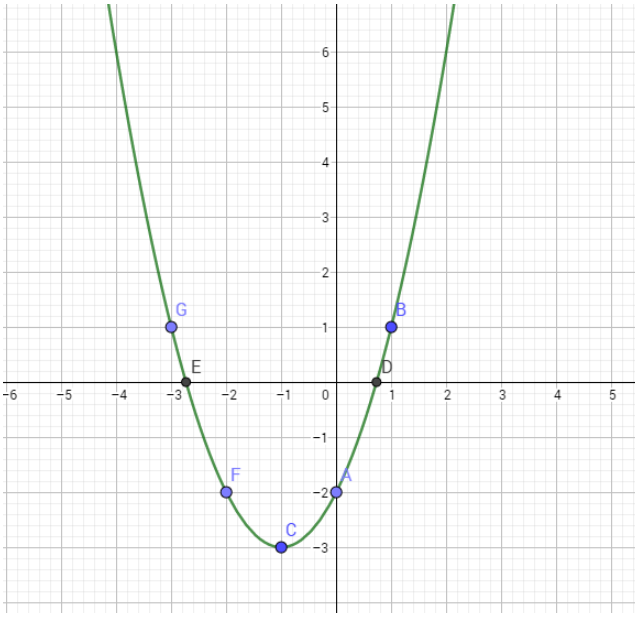


Figura 34: Gráfico da função f(x)=x²+2x-2. Fonte: Geogebra.

Para construir o gráfico de uma função quadrática precisamos analisar e entender alguns pontos:

- Imagem dos pontos do domínio da função;
- Perceber que o gráfico não pode ser desenhado por completo já que o mesmo tem como domínio conjunto dos reais ($\mathbb{R}$), logo devemos representar apenas alguns de seus pontos e tentar perceber alguma regularidade;
- Concavidade do gráfico;
- Zeros ou raízes da função;
- Interpretação geométrica das raízes;
- Vértice da parábola;
- Pontos de máximo e mínimo da função;

Tendo em mente esses pontos é possível esboçar o gráfico de uma função quadrática, sendo assim trabalharemos então esses tópicos para podermos realizar uma análise completa da função.

4. <u>Raízes de funções polinomiais do segundo grau (30 min)</u>

Raízes: Existem alguns métodos distintos que tem a finalidade de nos ajudar a encontrar as raízes de uma equação, em especial as do segundo grau, a seguir iremos explicitar alguns métodos.

Fórmula resolutiva para equações do segundo grau - A popular fórmula de bhaskara, chamada ainda de fórmula resolutiva para equações do segundo grau, é um dos métodos mais conhecidos para encontrar raízes de equações do segundo grau, este modelo consiste em extrair os coeficientes da equação e aplica-los na fórmula a seguir:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Soma e produto - Este método resume-se em encontrar as raízes através de tentativa e erro, baseando-se nos seguintes resultados, a soma das duas raízes deve ser da seguinte forma: $x' + x'' = \frac{-b}{a}$, enquanto o produto das mesmas obedece a ideia a seguir: $x' * x'' = \frac{c}{a}$.

Completar o quadrado - Esse método resume em achar as raízes da função através da manipulação de um trinômio quadrado perfeito, deixando a expressão da função na forma $(x + e)^2 + i = 0$, onde *e* e *i* são números reais quaisquer.

EXEMPLO: Vamos completar o quadrado de $f(x) = x^2 + 2x - 3$ e resolver para achar as raízes da função.

Podemos reescrever a função acima como $(x + 1)^2 - 4 = 0$, em seguida manipulamos a expressão para obtermos as raízes da função:

$$(x + 1)^2 = 4$$

$$x + 1 = \pm\sqrt{4}$$

$$x + 1 = \pm 2$$

$$x = \pm 2 - 1$$

$$x' = -3 \qquad x'' = 1$$

5. Exercícios de Fixação (20 min)

Pediremos para que os alunos resolvam os exercícios 1 e 2 do material do aluno, para depois corrigirmos no quadro.

6. Intervalo

7. Estudo do sinal, estudo do coeficiente “a” e analise de uma parábola (15 min)

Concavidade: Sendo o gráfico da função quadrática uma curva chamada parábola, podemos ter alguns casos referente a sua concavidade e para determina-las basta observar algumas coisas:

Se $a > 0$ a parábola tem concavidade voltada para cima;

Se $a < 0$ a parábola tem a concavidade voltada para baixo;

OBS: é importante lembrar que se $a = 0$, a função deixa de ser do segundo grau e passa a ser uma função afim, cujo gráfico é uma reta, e não mais foco do nosso estudo.

Temos a seguinte imagem para exemplificarmos os casos do sinal da função e suas influencias:

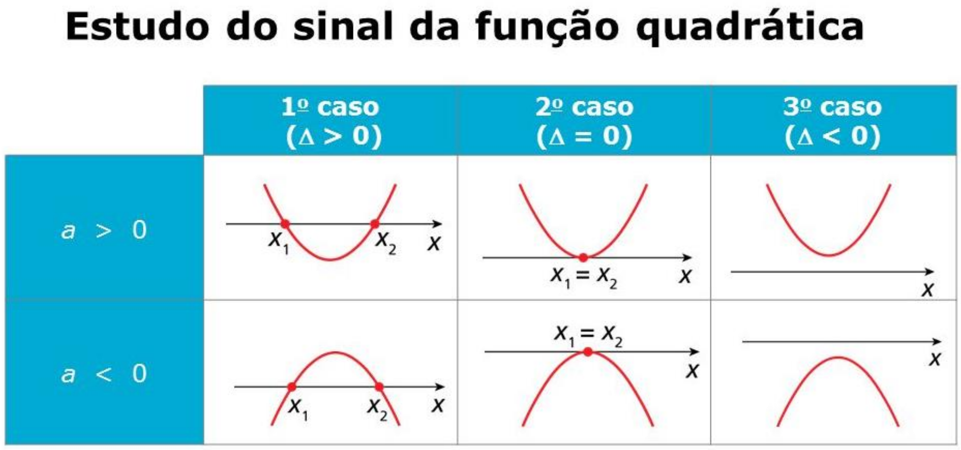


Tabela 3: Diferentes caras da função quadrática. Fonte: Matika.

Mostraremos também, com o auxílio do Geogebra, como os coeficientes alteram no gráfico da função.

8. <u>Exercício de fixação (15 min)</u>

Pediremos para que os alunos resolvam o exercício 3 do material do aluno, para corrigirmos posteriormente.

9. <u>Vértices e traçado da linha gráfica (10 min)</u>

Precisamos ainda dar olhos para outro ponto importante em uma função quadrática antes de traçar o seu gráfico, que é o vértice da parábola. Toda e qualquer parábola possui um vértice, este pode ser encontrado a partir do conhecimento de algumas fórmulas simples, vamos a elas:

O vértice da parábola é sempre um ponto do plano cartesiano onde situa-se o gráfico, como todo ponto no plano cartesiano este também é do tipo (x', y'), ou seja, tem uma coordenada em x e outra em y.

Para descobrir qual é a coordenada referente ao x, utiliza-se a fórmula $-\frac{b}{2a}$ e para encontrar o valor de y utilizamos $-\frac{\Delta}{4a}$.

Uma forma mais simples de encontrar o vértice é quando completamos o quadrado. Em certo momento do processo, temos uma expressão do tipo $(x+e)^2+j$. Temos que o vértice da função estará no ponto (-*e*, *j*).

Vejamos a função $f(x) = x^2 - 4x + 3$

Completando o quadrado, temos $f(x) = (x-2)^2 - 1$

Temos que o vértice dessa função se encontra no ponto (2, -1), como mostra a figura a seguir.

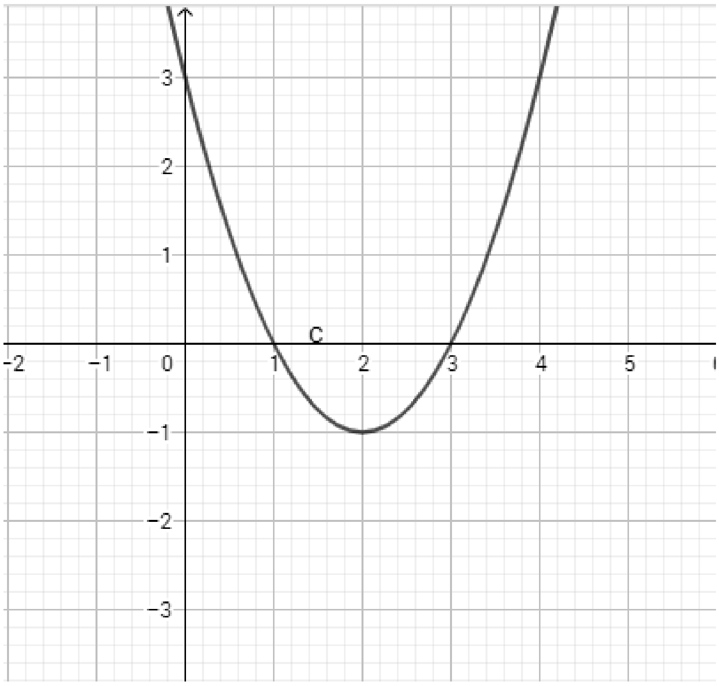


Figura 35:Gráfico de x^2- 4x + 3=0. Fonte: Geogebra.

10. <u>Pontos de máximo e mínimo de uma função polinomial do 2ºgrau (10 min)</u>

As parábolas que tem como domínio os números reais ℝ, apresentam sempre um ponto de máximo ou um ponto de mínimo, e nunca os dois ao mesmo tempo, teremos os seguintes casos:

Se a parábola for côncava para cima está irá possuir um ponto de mínimo apenas, já que a sua extremidade superior não pode ser definida uma vez que o gráfico tende ao infinito, e logo não apresenta ponto de máximo.

12.

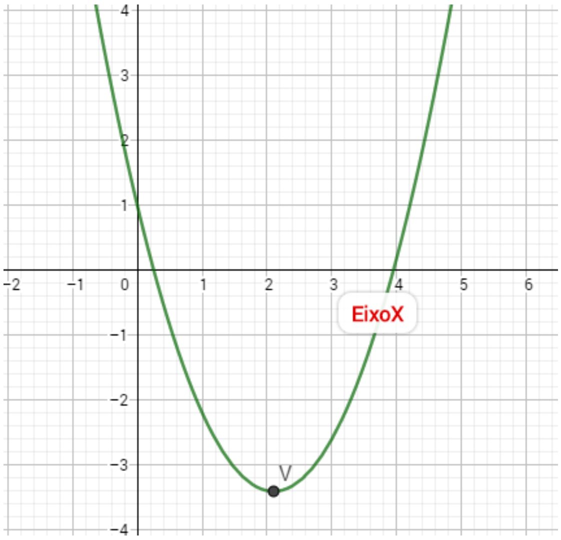


Figura 36: Ponto de mínimo. Fonte: Geogebra.

Se a parábola for côncava para baixo, esta irá apresentar apenas um ponto de máximo, uma vez que o seu ponto de mínimo se localizará no infinito também.

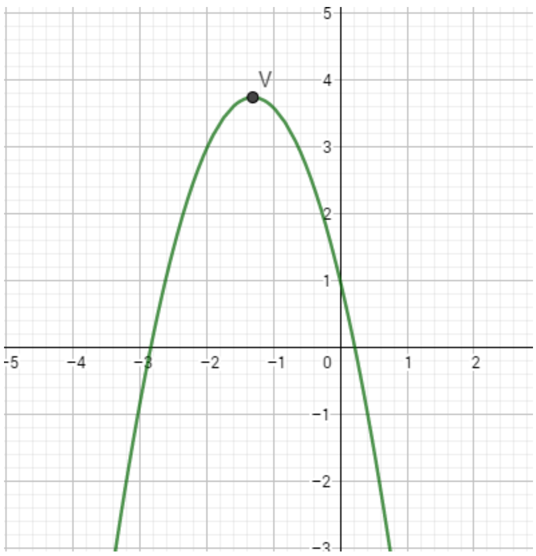


Figura 37: Ponto de máximo. Fonte: Geogebra.

Vale ressaltar ainda que o ponto que é de máximo ou de mínimo irá coincidir com o vértice da parábola, portanto é relativamente fácil se calcular o ponto de máximo ou mínimo do gráfico.

11. <u>Exercício de fixação (15 min)</u>

Pediremos para que os alunos resolvam o exercício 4 do material do aluno, para corrigirmos posteriormente.

12. <u>Gráfico da função quadrática (10 min)</u>

Após termos analisados todos os pontos acima e sabermos como encontrar pontos chave do gráfico da função, realizaremos a construção do gráfico.

Exemplo: $f(x) = x^2 + 2x - 2$

Nesta função teremos,

Vértice= (-1,-3) = C

Raízes= (-2,73,0) e (0,73,0) = E e D

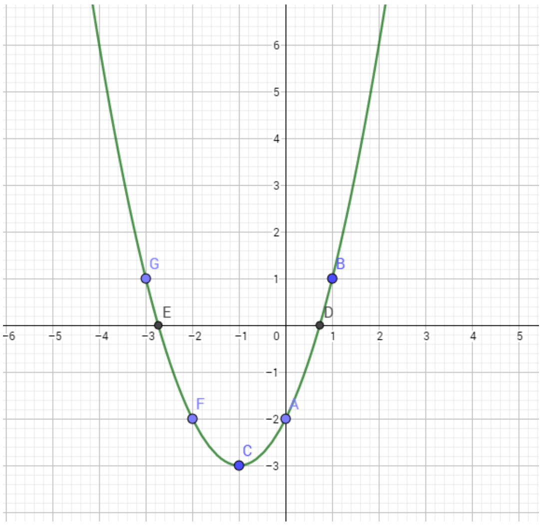


Figura 38: Gráfico da função f(x)=x²+2x-2. Fonte: Geogebra.

13. <u>Exercícios material do aluno (15 min)</u>

Neste momento os alunos terão um tempo para resolver os demais exercícios do material do aluno e esclarecer quaisquer dúvidas referentes a eles.

14. <u>Esclarecimentos de dúvidas da aula e encerramento (10 min)</u>

Realizaremos uma breve recapitulação sobre a aula, esclareceremos possíveis dúvidas que tenham ficado e então encerraremos a aula.

<u>Avaliação:</u>

A avaliação se dará por meio da observação do desenvolvimento dos alunos durante a aula.

<u>Referências:</u>

BARROSO, Juliane M. **Projeto Araribá:** Matemática. São Paulo: Moderna, 2006.

GUELLI, Oscar. **Matemática:** uma aventura do pensamento. São Paulo: Ática, 1999.

IMENES & LELLIS. **Matemática**. São Paulo: Scipione, 1997.
QUESTÕES ENEM DE FUNÇÃO DO 2° GRAU. **Função de 2° grau**. Disponível em: https://matika.com.br/vestibular/enem/funcao-de-2-grau. Acesso em: 15 jun 2018.

2.4.3.1. Material do aluno

MATERIAL DO ALUNO 7° ENCONTRO

1 - Considere a função $f(x) = x^2 - 4x - 7$ e sejam m e n suas raízes. Então quanto vale m^2+n^2?

2 - Obtenha os zeros da função quadrática definida por $f(x) = x^2 + 6x - 7$ e as coordenadas dos pontos onde a parábola correspondente intercepta o eixo das abscissas (eixo x).

3 - Determine a concavidade e quantas raízes reais têm as seguintes funções:

a) $f(x) = x^2 + 3x - 4$ b) $f(x) = x^2 + 2x + 5$

4 - Determine o vértice das seguintes funções e classifique se são pontos de máximo ou de mínimo:

a) $f(x) = x^2 + 8x + 9$ b) $f(x) = 9x - x^2$

5 - A função $f(x) = -x^2 + 4x + k$ tem duas raízes reais iguais. Calcular a constante k, obter a raiz dupla e esboçar o gráfico da função.

6 - Um goleiro chuta uma bola cuja trajetória descreve a parábola $f(x) = -4x^2 + 24x$, onde x e y são medidas em metros. Qual a altura máxima, em metros, atingida pela bola? Faça a representação do gráfico.

7 - (ENEM 2013) A temperatura T de um forno (em graus centígrados) é reduzida por um sistema a partir do instante de seu desligamento (t = 0) e varia de acordo com a expressão $T(t) = \frac{-t^2}{4} + 400$ com t em minutos. Por motivos de segurança, a trava do forno só é liberada para abertura quando o forno atinge a temperatura de 39 ºC. Qual o tempo mínimo de espera, em minutos, após se desligar o forno, para que a porta possa ser aberta?

8 - (ENEM 2014) Um professor, depois de corrigir as provas de sua turma, percebeu que várias questões estavam muito difíceis. Para compensar, decidiu utilizar uma função polinomial f, de grau menor que 3, para alterar as notas da prova para notas y=f(x), da seguinte maneira:

- A nota zero permanece zero.
- A nota 10 permanece 10.
- A nota 5 passa a ser 6.

Qual a expressão da função y=f(x) a ser utilizada pelo professor?

9 - Uma bola, ao ser chutada num tiro de meta por um goleiro, numa partida de futebol, teve sua trajetória descrita pela equação $h(t) = -2t^2 + 8t$ $(t \geq 0)$, onde t é o tempo medido em segundo e h(t) é a altura em metros da bola no instante *t*. Determine, após o chute:

a) o instante em que a bola retornará ao solo.

b) a altura atingida pela bola.

10 - (G1-cftmg 2011) Se o gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ passa pelos pontos P(0,1), Q(-1,7) e R(2,7), então, o valor $a + b - 2c$ é igual a

11 - (UEM 2012) O lucro de uma empresa em um período de 15 meses foi modelado matematicamente por meio da seguinte função $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que a variável x indica o mês e f (x) o lucro, em milhões de reais, obtido no mês x. Sabe-se que no início desse período, digamos mês zero, a empresa tinha um lucro de 2 milhões de reais; no primeiro mês, o lucro foi de 3 milhões de reais; e, no décimo quinto mês, o lucro foi de 7 milhões de reais. Com base nessas informações, assinale o que for correto.

a) O lucro obtido no décimo quarto mês foi igual ao lucro obtido no oitavo mês.

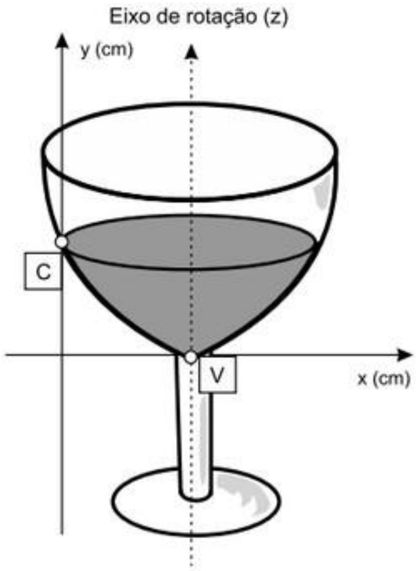
b) O lucro máximo foi obtido no décimo mês.

c) O lucro máximo obtido foi superior a 7,5 milhões de reais.

d) O lucro da empresa nesse período de 15 meses oscilou de 2 a 7 milhões de reais.

e) O gráfico da função que modela o lucro é uma parábola com concavidade para baixo.

12 – (ENEM 2013) A parte interior de uma taça foi gerada pela rotação de uma parábola em torno de um eixo z, conforme mostra a figura.



A função real que expressa a parábola, no plano cartesiano da figura, é dada pela lei $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + c$, onde C é a medida da altura do líquido contido na taça, em centímetros. Sabe-se que o ponto V, na figura, representa o vértice da parábola, localizado sobre o eixo x. Nessas condições, qual a altura do líquido contido na taça, em centímetros?

13 - Um senhor, pai de dois filhos, deseja comprar dois terrenos, com áreas de mesma medida, um para cada filho. Um dos terrenos visitados já está demarcado e, embora não tenha um formato convencional (como se observa na Figura B), agradou ao filho mais velho e, por isso, foi comprado. O filho mais novo possui um projeto arquitetônico de uma casa que quer construir, mas, para isso, precisa de um terreno na forma retangular (como mostrado na Figura A) cujo comprimento seja 7 m maior do que a largura.

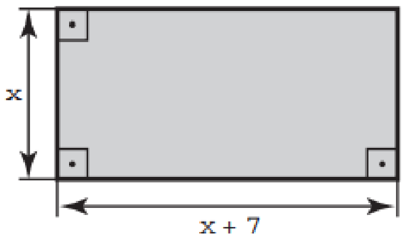


Figura A

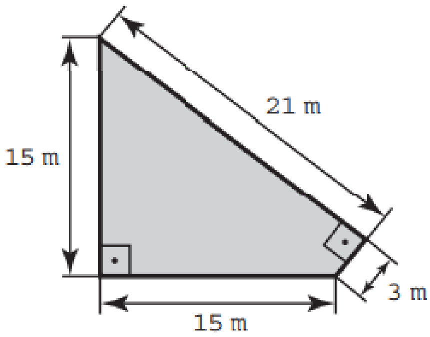


Figura B

Para satisfazer o filho mais novo, esse senhor precisa encontrar um terreno retangular cujas medidas, em metro, do comprimento e da largura sejam iguais a qual medida?

2.4.3.2. Relato da aula

No dia 23 de junho de 2018 às 8 horas da manha, iniciamos como o programado o 7° encontro do PROMAT. Estavam presentes 17 alunos, e trabalhamos neste encontro função do 2° grau (função quadrática).

Iniciamos a aula com o jogo do dominó de funções do 1° grau, os alunos se juntaram em duplas para jogar, mas acabamos tendo um número ímpar de alunos, então um estagiário jogou com o aluno restante. Decidimos aplicar este jogo referente a aula anterior, pois havíamos planejado para finalização do 6° encontro, mas não tivemos tempo para implementa-lo, então realizamos no inicio desta aula como uma revisão do encontro anterior. O jogo foi bem proveitoso, os alunos se envolveram, quando tinham dúvidas perguntaram e muitos conseguiram fechar o jogo mais de uma vez.

Na sequência, iniciamos de fato o conteúdo programado para este encontro, apresentamos no quadro a definição de função do 2° grau, relembrando alguns conceitos da aula de equações, onde trabalhamos equações quadráticas e apresentamos algumas formas de encontrar as raízes como, fórmula resolutiva para equações do segundo grau e soma/produto.

Em seguida, como no encontro anterior explicamos como calcular a imagem em um dado ponto e exemplificamos para melhor entendimento. Posteriormente realizamos alguns apontamentos sobre os principais tópicos necessários a se saber em relação a uma função do 2° grau, pontos estes que facilitam a montagem do gráfico da função. Passamos então um exemplo, no qual, juntamente com os alunos, encontramos as raízes da função, com a fórmula resolutiva para equações do segundo grau e por soma e produto, neste momento os alunos foram bastante participativos.

Posteriormente explicamos uma nova forma de encontrar as raízes de uma função quadrática, o completamento de quadrados, relembramos produtos notáveis e partimos para a explicação do método em si. A explicação foi bem tranquila, porém, os alunos pediram outro exemplo para assimilarem melhor e tivemos que elaborar na hora. Queríamos um exemplo com raízes exatas o que custou um pouco de tempo e algumas correções, mas com esse exemplo os alunos conseguiram compreender melhor o método.

Havíamos planejado aplicar e corrigir os exercícios 1 e 2 do material do aluno antes do intervalo, mas, como tivemos alguns atrasos, acabamos entregando estes exercícios e pedindo que os alunos os resolvessem após o intervalo. Deixamos um tempo para resolução e na sequência realizamos a correção do exercício 1, mas o 2 deixamos como exercício para casa, pois muitos ainda não haviam resolvido.

Continuamos a aula com a explicação sobre o sinal da função do 2° grau e análise da concavidade da parábola, apresentando aos alunos quando ela será positiva ou negativa e qual a diferença quando $a > 0$ e $a < 0$, fazendo uma importante observação sobre $a = 0$ (que se tornara uma função afim), e com o geogebra explicamos a influência dos coeficientes a, b e c na função.

Apresentamos então como encontrar o vértice da parábola de uma função do 2° grau, primeiramente através do completamento do quadrado utilizando um exemplo e em seguida com o auxilio do geogebra explicamos quando o vértice será um ponto de máximo ou um ponto de mínimo. Passamos também utilizando o mesmo exemplo anterior as fórmulas para encontrar x e y do vértice, caso eles prefiram ao invés do completamento do quadrado.

Havíamos planejado aplicar e corrigir os exercícios 3 e 4 do material do aluno, mas acabamos não tendo tempo e pedimos que resolvessem e trouxessem suas dúvidas na próxima aula.

Ao final de todo o conteúdo e como já havíamos feito o apontamento sobre pontos importantes a se saber de uma função do 2° grau, passamos um exemplo para que identificassem as raízes da função, o vértice, qual a concavidade da parábola, se possuía ponto de máximo ou de mínimo e por último deveriam construir o gráfico da função. Realizamos a correção das alternativas solicitadas e realizamos a construção do gráfico esclarecendo dúvidas referentes.

Durante toda a aula os alunos participaram e demonstraram estar entendendo o que estávamos explicando, quando tinham dúvidas perguntaram e ajudaram a todo o momento principalmente durante as correções.

Finalizamos a aula informando que terminamos o 2° módulo do Promat e que iniciaríamos o 3° onde estudaríamos geometria, nos despedimos e encerramos a aula.

2.5. MÓDULO 3 – GEOMETRIA

2.5.1. Plano de aula do dia 30/06/2018

8º ENCONTRO

Público-Alvo:

Alunos do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

Objetivo Geral:

Compreender conceitos da geometria de modo que seja capaz identifica-los, entender suas propriedades bem como realizar operações com os mesmos.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com geometria, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Compreender o conceito de polígonos;
- Definir os elementos que compõe um polígono;
- Entender sobre a soma dos ângulos internos;
- Classificar os tipos de polígonos;
- Calcular área e perímetro;
- Compreender o conceito de poliedros;
- Definir os elementos que compõe um poliedro;
- Classificar os tipos de poliedros;
- Entender a relação de Euler.
- Calcular volume dos poliedros;

Conteúdo: Geometria

Recursos Didáticos: Quadro, giz, lista de exercícios, projetor.

Encaminhamento metodológico:

1. Revisão sobre o encontro anterior (15 min)

Iniciaremos a aula questionando os alunos sobre o último encontro, buscando esclarecer eventuais dúvidas e também questionando se há alguma dúvida da lista de exercício que necessitam da resolução.

2. Formalização do conceito de polígonos (15 min)

Neste momento apresentaremos aos alunos a definição de polígonos, explicando os elementos que o compõe.

Os **polígonos** são figuras planas e fechadas constituídas por segmentos de reta. Em um polígono temos os seguintes elementos:

Segmento de Reta: corresponde a união de dois pontos distintos.

Vértice: corresponde ao ponto de encontro dos segmentos.

Lado: corresponde a cada segmentos de reta que une vértices consecutivos.

Diagonal: corresponde ao segmento de reta que liga dois vértices não consecutivos, ou seja, um segmento de reta que passa pelo interior da figura. Para calcular o número de diagonais presentes num polígono utiliza-se a fórmula: $d = \frac{n(n-3)}{2}$, onde n é o número de lados.

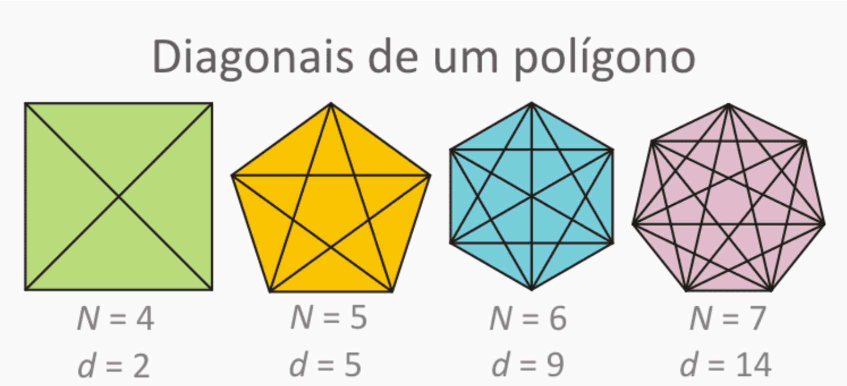


Figura 39: Diagonais de polígonos. Fonte: Brasil Escola.

Ângulos: os ângulos internos correspondem aos ângulos formados por dois lados consecutivos. Por outro lado, os ângulos externos são os ângulos formados por um lado e pelo prolongamento do lado sucessivo a ele. Importante ressaltar que a soma dos ângulos externos dos polígonos é de 360º. Para obter a soma dos ângulos internos de um polígono utiliza-se a fórmula: $S = (n-2) * 180$, sendo que o n indica o número de lados.

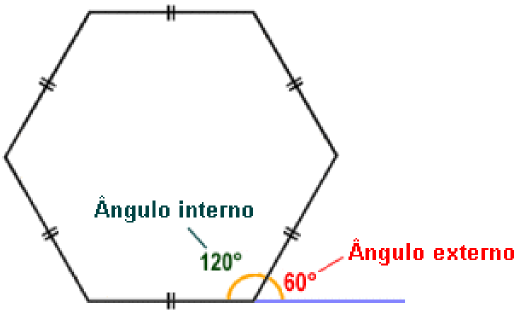


Figura 40: Ângulos internos. Fonte: Brasil Escola.

3. <u>Tipos e classificação (15 min)</u>

Em seguida apresentaremos aos alunos os tipos e classificações dos polígonos.

Os polígonos podem ser classificados em **polígonos regulares** ou **polígonos irregulares, referente** ao tamanho dos lados e consequentemente de seus ângulos. Em outras palavras, os regulares são aqueles polígonos que possuem lados e ângulos congruentes, enquanto nos polígonos irregulares, os lados e os ângulos são distintos.

Além disso, podem ser **convexos** ou não convexos (côncavo). Para tanto, se os ângulos que formam o polígono forem menores que 180º estes são classificados em polígonos convexos.

Por outro lado, se os ângulos que constituem o polígono são maiores que 180º são chamados de polígonos côncavos ou não convexos.

Exemplos:

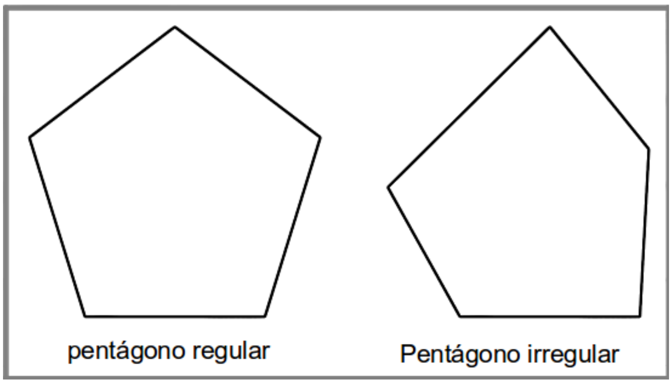


Figura 41: Regularidade e irregularidade de polígonos. Fonte: Brasil Escola.

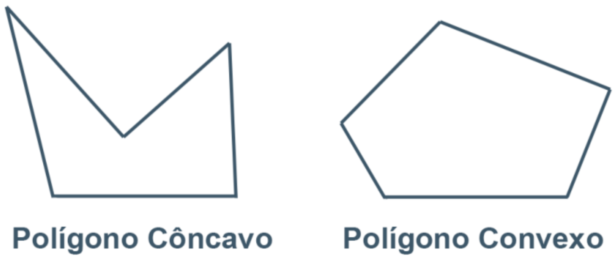
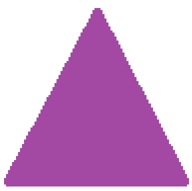


Figura 42: Convexidade e concavidade de polígonos. Fonte: Brasil Escola.

4. Alguns Polígonos (10 min)

Podemos classificar os polígonos em função do seu número de lados, observe a tabela com alguns exemplos:

Nome	Polígono	Número de lados
Triangulo		**3**

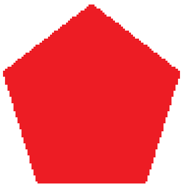
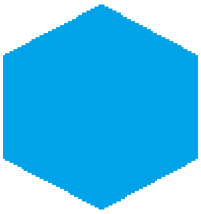
Quadrilátero		**4**
Pentágono		**5**
Hexágono		**6**

Tabela 4: Nomes e número de lados de cada polígono.

5. <u>Exercício de fixação (10 min)</u>

Pediremos aos alunos que resolvam o exercício 1 do material do aluno e em seguida realizaremos a correção.

6. <u>Área e perímetro (20 min)</u>

Perímetro é a medida do comprimento do contorno **de uma determinada figura (polígono)**, ou **ainda, é a soma das medidas dos lados de um polígono.**

Por exemplo:

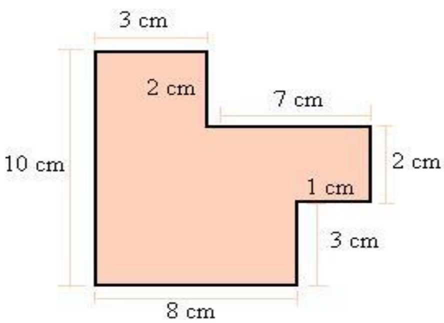


Figura 43: Perímetro da figura. Fonte: Brasil Escola.

O perímetro da figura é a soma de todos os seus lados:

P = 10 + 8 + 3 + 1 + 2 + 7 + 2 +3

P = 18 + 4 + 9 + 5

P = 22 + 14

P = 36

Teremos o caso da circunferência que possuímos uma formula única para o calculo do seu comprimento, que se dá pela seguinte formula:

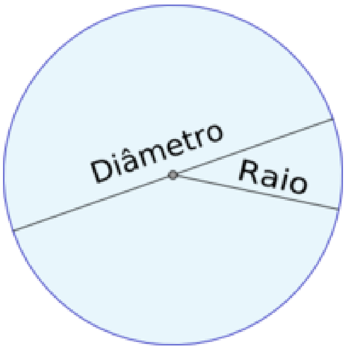


Figura 44: Diâmetro e raio de circunferência. Fonte: Brasil Escola.

$$C = 2\pi r$$

Sendo C o comprimento da circunferência e r o raio dela.

A unidade de medida utilizada no cálculo do perímetro é a mesma unidade de medida de comprimento: metro, centímetro, quilômetro, etc.

Área de um polígono é a medida da sua superfície e para calcula-la existem fórmulas diferentes para cada polígono. Temos algumas a seguir:

Quadrado:

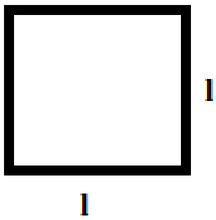


Figura 45: Quadrado. Fonte: Os Autores.

$$A = l^2$$

Sendo l o lado o quadrado, a área é *l*l.*

Retângulo:

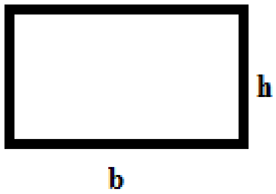


Figura 46: Retângulo. Fonte: Os Autores.

$$A = b * h$$

Sendo b a base do retângulo e h a altura.

Triângulo:

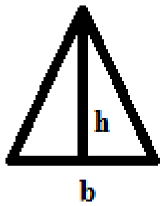


Figura 47: Triângulo. Fonte: Os Autores.

$$A = \frac{b * h}{2}$$

Sendo b a base do triangulo e h a altura.

Trapézio:

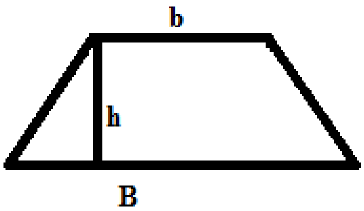


Figura 48: Trapézio. Fonte: Os Autores.

$$A = \frac{(B + b) * h}{2}$$

Sendo B a base maior do trapézio, b a base menor e h a altura.

Losango:

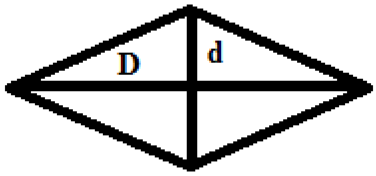


Figura 49: Losango. Fonte: Os Autores.

$$A = \frac{D * d}{2}$$

Sendo D a diagonal maior e d a diagonal menor.

Circulo:

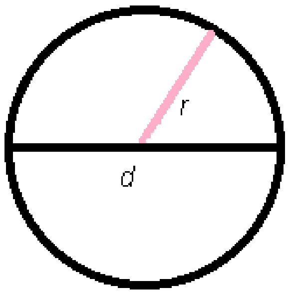


Figura 50: Circunferência. Fonte: Os Autores.

$$A = \pi r^2$$

A área de polígonos regulares como o pentágono, hexágono, octógono etc, explicaremos no próximo encontro onde abordaremos o conteúdo de triângulos e nestes polígonos podemos deduzir suas formular de área a partir da decomposição em n triângulos.

7. <u>Exercício de fixação (15 min)</u>

Pediremos aos alunos que resolvam o exercício 2 do material do aluno e em seguida realizaremos a correção.

8. <u>Intervalo</u>

9. <u>Introdução e definição de Poliedros (10 min)</u>

Neste momento apresentaremos aos alunos a definição, os elementos, tipos e classificação dos poliedros.

Poliedros são sólidos geométricos formados por três elementos básicos: vértices, arestas e faces. Temos os seguintes elementos:

Vértice: é formado pelo encontro de duas retas (arestas);

Arestas: é a reta formada pelo encontro de duas faces;

Face: é cada região plana do poliedro, delimitada por arestas.

Os poliedros podem ser convexos ou côncavos, um poliedro é convexo se dados quaisquer dois pontos pertencentes à superfície desse poliedro, o segmento que tem esses pontos como extremidade está inteiramente contido no poliedro. Caso exista algum segmento que não satisfaça essa condição, trata-se de um poliedro côncavo ou não convexo.

Os poliedros ainda podem ser regulares ou irregulares:

Um poliedro é chamado regular se, e somente se:

- É convexo.
- Todas as suas faces são formadas por polígonos regulares e congruentes entre si.
- Todos os vértices formam ângulos congruentes.

Um poliedro é chamado irregular quando ele não obedecer, qualquer uma das três condições acima.

Exemplos:

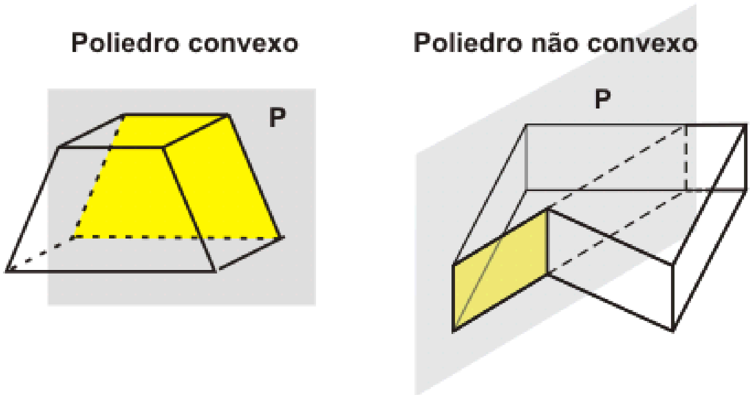


Figura 51: Convexidade e concavidade de poliedros. Fonte: Brasil Escola.

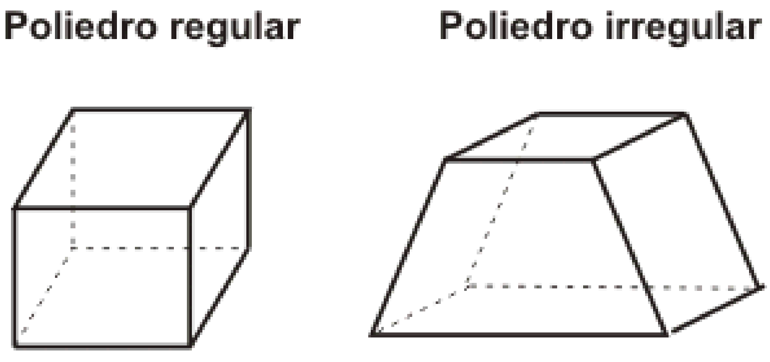


Figura 52: Regularidade e irregularidade de poliedros. Fonte: Brasil Escola.

10. Alguns Poliedros (10 min)

A seguir apresentaremos alguns poliedros, seu nome e sua forma.

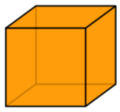
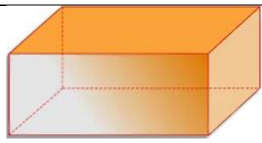
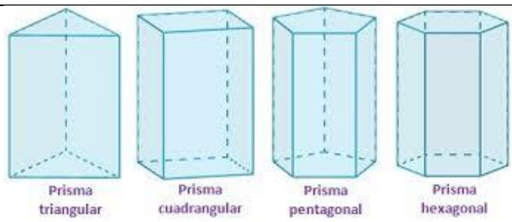
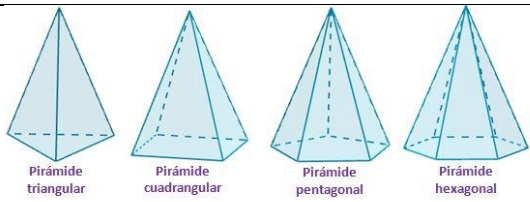
Nome	Figura
Cubo	
Paralelepípedo	
Prisma	
Pirâmide	

Tabela 5: Nomes de Poliedros.

Poliedros Regulares, os que validam as três condições passadas anteriormente são cinco, os chamados Poliedros de Platão e são os seguintes:

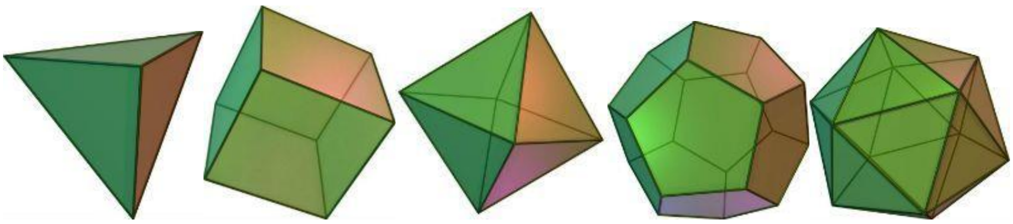


Figura 53: Poliedros de Platão. Fonte Brasil Escola.

Tetraedro: sólido geométrico formado por 4 vértices, 4 faces triangulares e 6 arestas.

Hexaedro: sólido geométrico formado por 8 vértices, 6 faces quadrangulares e 12 arestas.

Octaedro: sólido geométrico formado por 6 vértices, 8 faces triangulares e 12 arestas.

Dodecaedro: sólido geométrico formado por 20 vértices, 12 faces pentagonais e 30 arestas.

Icosaedro: sólido geométrico formado por 12 vértices, 20 faces triangulares e 30 arestas.

11. Relação de Euler (10 min)

O matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) encontrou uma relação entre os vértices, arestas e faces de qualquer poliedro convexo. Temos a seguinte relação:

$$V + F - A = 2$$

Sendo Vertices (V), Faces (F) e Arestas (A).

Vejamos o que acontece com alguns exemplos:

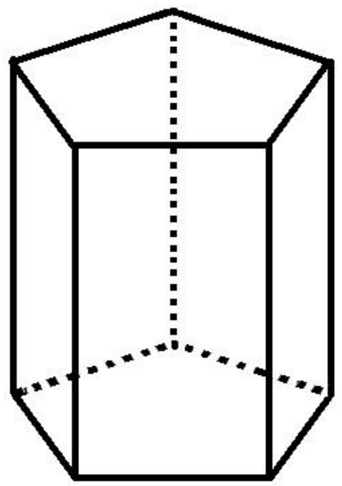


Figura 54: Prisma. Fonte: Alunos Online.

O prisma de base pentagonal possui 7 faces, 10 vértices e 15 arestas. Vejamos:

Somando os números de vértices e faces e comparando com o número de arestas, teremos:

10+7=15

Ou seja, para ser verdade temos que somar 2 com a quantidade de arestas e teremos:

10+7=15+2 , o que equivale a

V + F = A + 2.

Essa equação representa a Relação de Euler.

12. Exercício de fixação (10 min)

Pediremos aos alunos que resolvam o exercício 3 do material do aluno e em seguida realizaremos a correção.

13. Volume dos poliedros (15 min)

Poliedros	**Volume**	**Especificações**

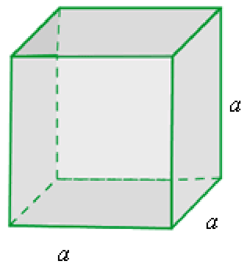
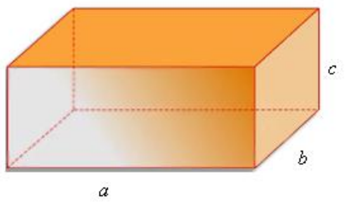
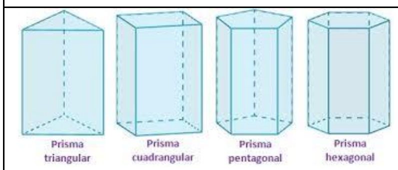
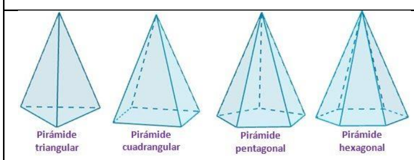
	$V = a * a * a$ $V = a^3$	**Cubo possui todas as arestas iguais, logo, altura=comprimento= largura=a**
	$V = a * b * c$	**Sendo a o comprimento, b a largura e c a altura.**
	$V = Ab * h$	**Sendo Ab a área da base e h a altura.**
	$V = \frac{(Ab * h)}{3}$	**Sendo Ab a área da base e h a altura.**

Tabela 6: Volume de poliedros.

O cálculo de áreas de poliedros não necessita nenhuma fórmula nova: basta calcular as áreas de todas as faces e somar. Isto é feito usando as fórmulas de área dos polígonos.

14. <u>Exercício para fixação (10 min)</u>

Pediremos aos alunos que resolvam o exercício 4 do material do aluno e em seguida realizaremos a correção.

15. <u>Exercícios material do aluno (25 min)</u>

Neste momento os alunos terão um tempo para começarem os demais exercícios do meteriam do aluno ou tirarem qualquer dúvida referente.

16. <u>Esclarecimentos e encerramento (10 min)</u>

Neste momento realizaremos uma recapitulação da aula, esclarecendo qualquer dúvida que tenha ficado e então encerraremos a aula.

Avaliação: A avaliação se dará por meio da observação do desenvolvimento dos alunos durante a aula.

Referências:

EDITORA MODERNA. (Org). LEONARDO, Fabio Martins de. (Ed. Responsável) **Conexões com a matemática**, volume 2. 2° Ed. São Paulo: Moderna , 2013.

GIOVANNI JUNIOR, José Ruy. A conquista da matemática. 6º ano. Ed. Renovada. São Paulo, FTD, 2009.

BARROSO, Juliane M. **Projeto Araribá:** Matemática. São Paulo: Moderna, 2006.

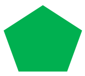
POLIEDROS. **Poliedros**. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/poliedros.htm. Acesso em: 25 jun 2018.

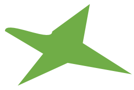
RELAÇÃO DE EULER. **Relação de Euler**. Disponível em: https://alunosonline.uol.com.br/matematica/relacao-euler.html. Acesso em 21 jun 2018.

2.5.1.1. Material do aluno

MATERIAL DO ALUNO 8° ENCONTRO

1 - Complete a tabela:

Polígono	Número de lados	Número de vértices	Número de ângulos	Regular ou irregular	Convexo ou côncavo
					
					
					
					

2 - Calcule o perímetro e a área de:

a) Um retângulo de comprimento 25 m e largura 12 m.

b) Um quadrado de lado 8 cm.

c) Um losango de lado 15 m e diagonal maior 24 m e diagonal menor 18 m.

3 - Sabendo que um poliedro possui 20 vértices e que em cada vértice se encontram 5 arestas, determine o número de faces dessa figura.

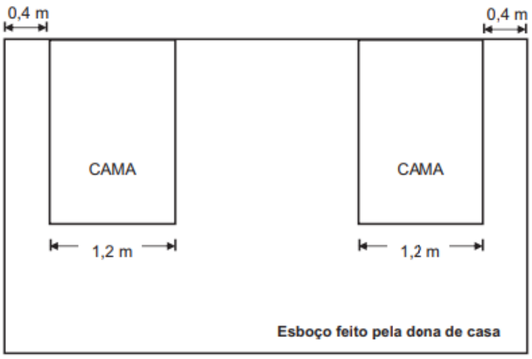
4 - Calcule o volume:

a)Um prisma quadrangular regular tem 20cm de altura e a aresta da base mede 4cm.

b)Um cubo com 10 cm de aresta.

5 - Um polígono convexo que possua exatamente 170 diagonais é formado por quantos lados? E qual é a soma dos seus ângulos internos?

6 - (ENEM 2013) Uma dona de casa pretende comprar uma escrivaninha para colocar entre as duas camas do quarto de seus filhos. Ela sabe que o quarto é retangular, de dimensões 4 m × 5 m, e que as cabeceiras das camas estão encostadas na parede de maior dimensão, onde ela pretende colocar a escrivaninha, garantindo uma distância de 0,4 m entre a escrivaninha e cada uma das camas, para circulação. Após fazer um esboço com algumas medidas, decidirá se comprará ou não a escrivaninha.



Após analisar o esboço e realizar alguns cálculos, a dona de casa decidiu que poderia comprar uma escrivaninha, qual a largura máxima que ela pode ter?

7 - (ENEM-2011) Em uma certa cidade, os moradores de um bairro carente de espaços de lazer reivindicam à prefeitura municipal a construção de uma praça. A prefeitura concorda com a solicitação e afirma que irá construí-la em formato retangular devido às características técnicas do terreno. Restrições de natureza orçamentária impõem que sejam gastos, no máximo, 180 m de tela para cercar a praça. A prefeitura apresenta aos moradores desse bairro as medidas dos terrenos disponíveis para a construção da praça:

Terreno 1: 55 m por 45 m

Terreno 2: 55 m por 55 m

Terreno 3: 60 m por 30 m

Terreno 4: 70 m por 20 m

Terreno 5: 95 m por 85 m

Para optar pelo terreno de maior área, que atenda às restrições impostas pela prefeitura, os moradores deverão escolher qual terreno?

8 - (PUC-RIO 2007) Num retângulo de perímetro 60, a base é duas vezes a altura. Então qual a área?

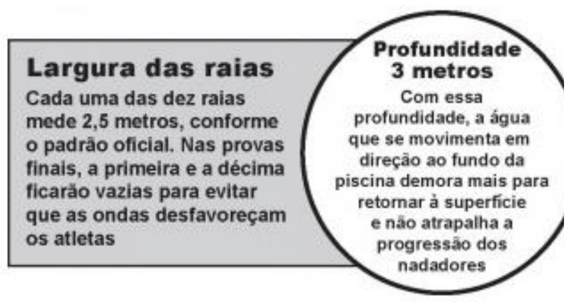
9 - (Fuvest) O número de faces triangulares de uma pirâmide é 11. Pode-se, então, afirmar que esta pirâmide possui quantos vértices e arestas?

10 - (Cesgranrio) Um poliedro convexo tem 14 vértices. Em 6 desses vértices concorrem 4 arestas, em 4 desses vértices concorrem 3 arestas e, nos demais vértices, concorrem 5 arestas. Qual o número de faces desse poliedro?

11 - Dispondo-se de uma folha de cartolina, de 70cm de comprimento por 50cm de largura, pode – se construir uma caixa, sem tampa, cortando-se um quadrado de 8cm de lado em cada lado. Determine o volume desta caixa.

12 - (ENEM 2017) O hábito cristalino é um termo utilizado por mineralogistas para descrever a aparência típica de um cristal em termos de tamanho e forma. A granada é um mineral cujo hábito cristalino é um poliedro com 30 arestas e 20 vértices. Um mineralogista construiu um modelo ilustrativo de um cristal de granada pela junção dos polígonos correspondentes às faces. Supondo que o poliedro ilustrativo de um cristal de granada é convexo, então qual a quantidade de faces utilizadas na montagem do modelo ilustrativo desse cristal?

13 - (ENEM 2017) Para a Olimpíada de 2012, a piscina principal do Centro Aquático de Londres, medindo 50 metros de comprimento, foi remodelada para ajudar os atletas a melhorar suas marcas. Observe duas das melhorias:



Veja, n. 2 278, jul. 2012 (adapta

Qual a capacidade da piscina em destaque, em metro cúbico?

14 - (ENEM 2017) Um casal realiza sua mudança de domicílio e necessita colocar numa caixa de papelão um objeto cúbico, de 80 cm de aresta, que não pode ser desmontado. Eles têm à disposição cinco caixas, com diferentes dimensões, conforme descrito:

• Caixa 1: 86 cm x 86 cm x 86 cm
• Caixa 2: 75 cm x 82 cm x 90 cm
• Caixa 3: 85 cm x 82 cm x 90 cm
• Caixa 4: 82 cm x 95 cm x 82 cm
• Caixa 5: 80 cm x 95 cm x 85 cm

O casal precisa escolher uma caixa na qual o objeto caiba, de modo que sobre o menor espaço livre em seu interior. Qual deve ser a caixa escolhida pelo casa

2.5.1.2. Relato da aula

No dia 30 de junho de 2018 sucedeu o 8° encontro do Promat, com inicio às 8 horas da manhã. Estavam presentes neste dia 6 alunos, um número para nós estagiários bem abaixo do esperado. Nesta aula trabalhos geometria (polígonos e poliedros).

Iniciamos a aula com a revisão do conteúdo do encontro passado, que era função de segundo grau. Momento proveitoso e sem nenhuma dúvida dos alunos referente aos exercícios da lista, que havia ficado para resolver em casa. Em seguida, iniciamos o conteúdo proposto desta aula com a definição de polígonos e seus elementos, tipos e classificação de polígonos, de modo que os alunos pareceram entender o que estava sendo proposto e tiveram uma boa participação entre eles e os estagiários.

Após a formalização do conteúdo passamos aos alunos o exercício 1 do material do aluno e deixamos um tempo para que eles o fizessem, posteriormente corrigimos com eles. Em seguida, passamos para eles algo que não estava proposto, que era quadriláteros notáveis. Fizemos no quadro a representação desses quadriláteros, através de conjuntos e explicamos cada um. A representação ficou da seguinte maneira:

Figura 55: Representação do conjunto de quadriláteros.

Os alunos pareceram entender o caso dos quadriláteros notáveis, sem nenhuma dúvida referente a isso.

Em seguida, passamos a explicar o conceito de área e perímetro. No momento em que se apresentou a fórmula da área do triângulo, foi perguntado aos alunos se eles sabiam por que a fórmula da área do triangulo era dividida por dois. Como nenhuns dos alunos sabiam essa informação, explicamos a eles que isso ocorre, pois se pegarmos o retângulo e fazermos uma diagonal, temos que esse retângulo ficará dividido em dois triângulos, e como a área do retângulo é $A = b * h$, então por isso quando temos um triângulo só, sua área é dividida por dois.

Posteriormente pedimos aos alunos que fizessem o exercício 2 do material do aluno e deixamos um tempo para eles fazerem, depois corrigimos com eles no quadro. Como tínhamos um pouco de tempo ainda antes do intervalo, pedimos a eles que fizessem também os exercícios 6 e 7 do material do aluno, que também eram sobre área e perímetro. No exercício 6 os alunos tiveram dificuldade de fazê-lo, pois não conseguiram interpretar o exercício, mas explicamos no quadro e resolvemos com eles, esclarecendo as duvidas relatadas.

Após apresentamos aos alunos um vídeo sobre os ângulos internos e externos de um polígono, explicamos que a soma dos ângulos externos de um polígono será sempre 360° e que a soma de um ângulo interno com um ângulo externo de um polígono será 180°. Essa parte da aula foi bem proveitosa, os alunos compreenderam bem o que foi apresentado a eles e assim fomos para o intervalo.

Posteriormente ao intervalo, passamos a explicar o conceito de poliedros, seus elementos, a convexidade e regularidade de um poliedro, de modo que os alunos entenderam a explicação dessa parte do conteúdo. Além disso, apresentamos para eles sobre os poliedros de Platão, que são os cinco poliedros regulares. Foi bem proveitosa essa apresentação, pois os alunos ainda não tinham visto sobre isso e assim se tornou algo novo para eles.

Em seguida pedimos aos alunos que eles fizessem uma tabela com o número de vértices, faces e arestas dos poliedros de Platão, que foram apresentados a eles, e de um prisma de base pentagonal, que estava desenhando no quadro. Pedimos também que eles encontrassem uma relação entre esses elementos, no intuito de que os alunos descobrissem a relação de Euler. Deixamos um tempo para que eles pudessem encontrar essa relação e depois formalizamos a relação de Euler.

Após explicamos aos alunos sobre o volume dos poliedros e pedimos para eles resolverem o exercício 4 do material do aluno, depois corrigimos no quadro. Também explicamos a eles que os poliedros com base circular, como o cilindro, cone e a esfera seriam trabalhados nos próximos encontros do Promat. Os outros exercícios do material do aluno ficaram para resolução em casa.

Nesta aula tinhamos menos alunos do que o esperado, sendo assim conseguimos concluir o plano de aula mais rápido que o previsto, mas isto não interferiu com o desenvolvimento da aula, com o tempo extra tivemos a oportunidade de resolver quase todo material do aluno que ficaria para resolução em casa, conseguimos tirar duvidas e isso também aproximou nós estagiários dos alunos presentes, conseguimos observar duvidas recorrentes como a de interpretação que em outras aulas não havia ficado aparente, com isso mesmo com os imprevistos conseguimos tirar grande proveito desta aula.

2.5.2. Plano de aula do dia 07/07/2018

9º ENCONTRO

Público-Alvo:

Alunos do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

Objetivo Geral:

Reconhecer um triângulo; conhecer e identificar os elementos do triângulo; classificar os triângulos quanto aos lados e ângulos.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com triângulos, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Conhecer e identificar um triângulo;
- Identificar os elementos de um triângulo;
- Conhecer os tipos de triângulos;
- Calcular área e perímetro do um triângulo;
- Reconhecer triângulos semelhantes;
- Entender e aplicar o teorema de Pitágoras;
- Reconhecer as relações métricas em um triângulo retângulo;
- Reconheça e entenda o teorema de Tales.

Conteúdo: Triângulos.

Recursos Didáticos: Quadro, giz, lista de exercícios, projetor.

1- Revisão da aula anterior (10 min)

Iniciaremos a aula questionando os alunos sobre o último, encontro buscando esclarecer eventuais dúvidas, sejam elas sobre a lista de exercícios ou a respeito do entendimento de algum conceito, mostrando ao quadro as respostas de seus apontamentos.

2- Formalização dos conceitos sobre triângulos (15 min)

Triângulos são polígonos formados por três lados. Os polígonos, por sua vez, são figuras geométricas formadas por segmentos de reta que, dois a dois, tocam-se em seus pontos extremos, mas que não se cruzam em qualquer outro ponto. Sendo assim, os triângulos herdam dos polígonos algumas características e propriedades básicas.

Os triângulos possuem os mesmos elementos dos polígonos, com exceção das diagonais. Os outros elementos dos polígonos que os triângulos possuem são:

- Lados: são os segmentos de reta que formam o polígono;
- Vértices: são os pontos de encontro entre os lados;
- Ângulos internos: são os ângulos que podem ser observados entre dois lados adjacentes de um triângulo. Há uma propriedade que garante que a soma dos três ângulos internos de um triângulo é sempre 180º;
- Ângulos externos: são os ângulos que podem ser observados entre um lado de um triângulo e o prolongamento do lado adjacente a ele.

Figura 56: Elementos de um triângulo. Fonte: Brasil Escola.

3- <u>Tipos de Triângulos (15 min)</u>

♦ O triângulo pode ser classificado segundo a medida do seu lado:

Triângulo escaleno: Todos os lados e ângulos são diferentes.

Figura 57: Triãngulo escaleno. Fonte: Brasil Escola.

Triângulos isósceles: dois lados iguais e os ângulos opostos a esses lados iguais.

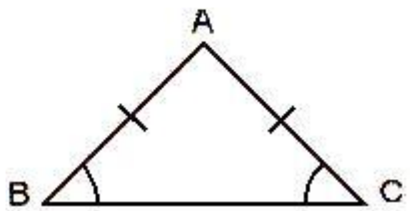


Figura 58: Triãngulo isósceles. Fonte: Brasil Escola.

Triângulo equilátero: Todos os lados e ângulos iguais. Concluímos que seus ângulos serão de 60°.

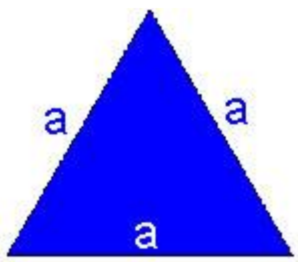


Figura 59: Triãngulo equilátero. Fonte: Brasil Escola.

♦ O triângulo pode ser classificado segundo seus ângulos internos.

- ❖ Triângulo retângulo: tem um ângulo que mede 90º.
- ❖ Obtusângulo: tem um ângulo obtuso, isto é, maior que 90°.
- ❖ Acutângulo: Tem todos os ângulos agudos, ou seja, menores que 90°.

<u>Exemplo</u>: Dado um triângulo isósceles com um ângulo de 30°, como na figura abaixo, calcule α.

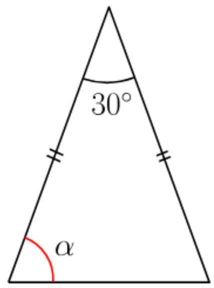


Figura 60: Triânglo do exercício. Fonte: Brasil Escola.

4- Exercício de Fixação (10 min)

Pediremos aos alunos que resolvam os exercícios 1 e 2 do material do aluno, para posterior correção.

5- Relembrando Área e Perímetro (5 min)

Relembrando a aula anterior, daremos as expressões para se calcular área e perímetro de um triângulo.

O perímetro é dado pela soma de todos os lados do triângulo.

A área é dada pela seguinte fórmula:

$$A = \frac{b.h}{2}$$

Onde b é o tamanho da base do triângulo e h é o valor de sua altura.

6- Exercício de Fixação (15 min)

Pediremos aos alunos que resolvam os exercícios 3 e 4 do material do aluno, para posterior correção.

7- Semelhança de triângulos (15 min)

Dois triângulos são semelhantes quando possuem os três ângulos ordenadamente congruentes (mesma medida) e os lados correspondentes proporcionais. Usamos o símbolo ~ para indicar que dois triângulos são semelhantes.

Para saber quais são os lados proporcionais, primeiro devemos identificar os ângulos de mesma medida. Os lados correspondentes serão os lados opostos a esses ângulos.

Como nos triângulos semelhantes os lados correspondentes são proporcionais, o resultado da divisão desses lados será um valor constante. Esse valor é chamado de razão de proporcionalidade.

Considere os triângulos ABC e EFG semelhantes, representados na figura abaixo:

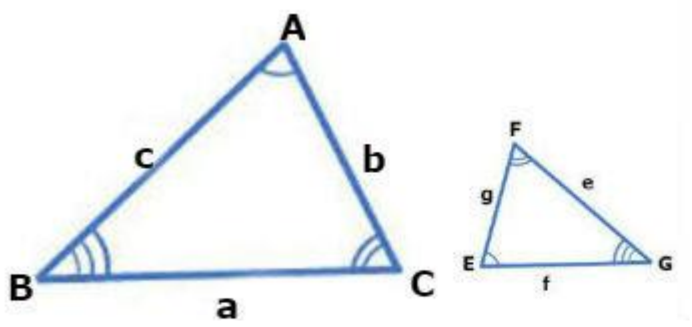


Figura 61: Triângulos semelhantes. Fonte: Brasil Escola.

Os lados *a* e *e*, *b* e *g*, *c* e *f* são homólogos, sendo assim, temos as seguintes proporções:

$$\frac{a}{e} = \frac{b}{g} = \frac{c}{f} = k$$

Onde k é a razão de proporcionalidade.

Casos de Semelhança

Para identificar se dois triângulos são semelhantes, basta verificar alguns elementos.

1º Caso: Dois triângulos são semelhantes se dois ângulos de um são congruentes a dois do outro. Critério AA (Ângulo, Ângulo).

2º Caso: Dois triângulos são semelhantes se os três lados de um são proporcionais aos três lados do outro. Critério LLL (Lado, Lado, Lado).

3º Caso: Dois triângulos são semelhantes se possuem um ângulo congruente compreendido entre lados proporcionais. Critério LAL (Lado, Ângulo, Lado).

Teorema Fundamental da semelhança

Quando uma reta paralela a um lado de um triângulo intersecta os outros dois lados em pontos distintos, forma um triângulo que é semelhante ao primeiro.

Na figura abaixo, representamos o triângulo ABC e a reta r paralela ao lado $\overline{BC}$.

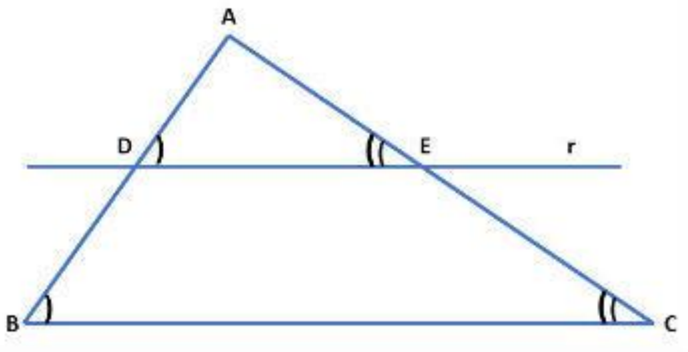


Figura 62: Representação triangular do teorema. Fonte: Brasil Escola.

Observando a figura, notamos que os ângulos $\widehat{B}$ e $\widehat{D}$ são congruentes, assim como os ângulos $\widehat{C}$ e $\widehat{E}$, pois a reta r é paralela ao lado $\overline{BC}$. Assim, pelo critério AA, os triângulos ABC e ADE são semelhantes.

8- <u>Exercício de Fixação (15 min)</u>

Pediremos aos alunos que resolvam os exercícios 5 e 6 do material do aluno, para posterior correção.

9- <u>Intervalo</u>

10- <u>Teorema de Pitágoras (15min)</u>

O Teorema de Pitágoras está relacionado com o comprimento dos lados do triângulo retângulo. Essa figura geométrica é formada por um ângulo interno de 90°, chamado de ângulo reto.

O enunciado desse teorema é: "a soma dos quadrados de seus catetos corresponde ao quadrado de sua hipotenusa."

Segundo o enunciado do Teorema de Pitágoras, a fórmula é representada da seguinte maneira:

$$\boldsymbol{h^2 = c1^2 + c2^2}$$

Sendo,

h: hipotenusa

c1: cateto 1

c2: cateto 2

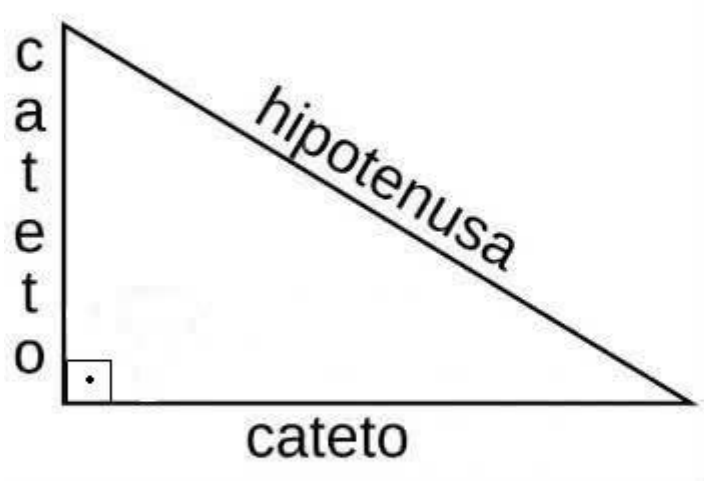


Figura 63: Triângulo retângulo. Fonte: Brasil Escola.

11- <u>Relações Métricas no Triângulo Retângulo (15 min)</u>

No triângulo representado abaixo, o lado a é a hipotenusa e b e c são os catetos.

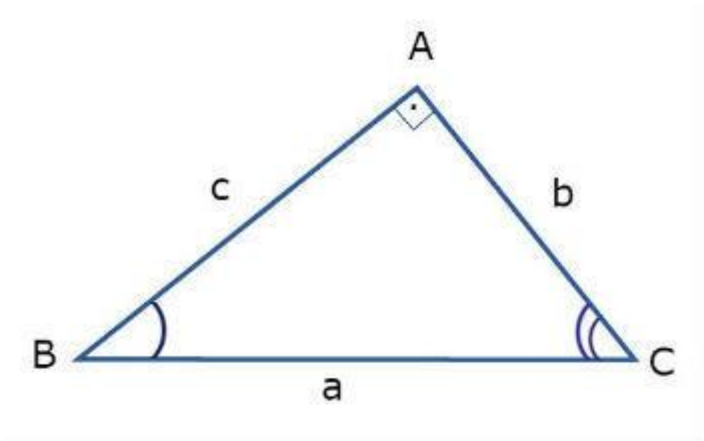


Figura 64: Triãngulo retângulo. Fonte: Brasil Escola.

Ao traçar a altura relativa à hipotenusa, dividimos o triângulo retângulo em dois outros triângulos retângulos. Conforme figura abaixo:

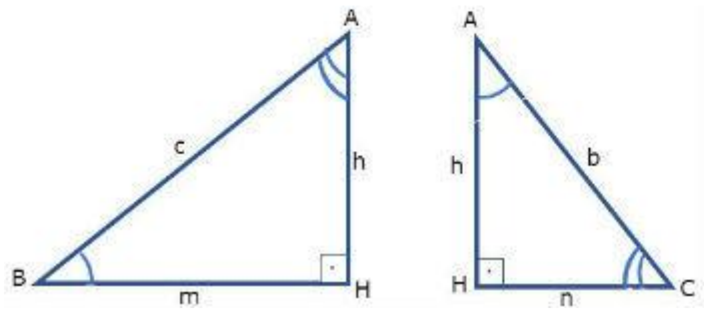


Figura 65: Representação das relações métricas. Fonte: Brasil Escola.

Observando os medidas dos ângulos desses três triângulos, percebemos que eles são semelhantes, ou seja:

$$ABC \sim ABH \sim AHC.$$

Usando as proporções entre os lados, determinamos as seguintes relações:

Relações Métricas
$a \cdot h = b \cdot c$
$b^2 = a \cdot n$
$c^2 = a \cdot m$
$h^2 = m \cdot n$
$a = m + n$
$a^2 = b^2 + c^2$

Quadro 10: Relações métricas no triângulo retângulo.

12- Exercício de Fixação (15 min)

Pediremos aos alunos que resolvam os exercícios 7 do material do aluno, para posterior correção.

13- Teorema de Tales (15 min)

Teorema: Se duas retas são transversais a um conjunto de três ou mais retas paralelas, então a razão entre os comprimentos de dois segmentos quaisquer determinados sobre uma delas é igual à razão entre os comprimentos dos segmentos correspondentes determinados sobre a outra.

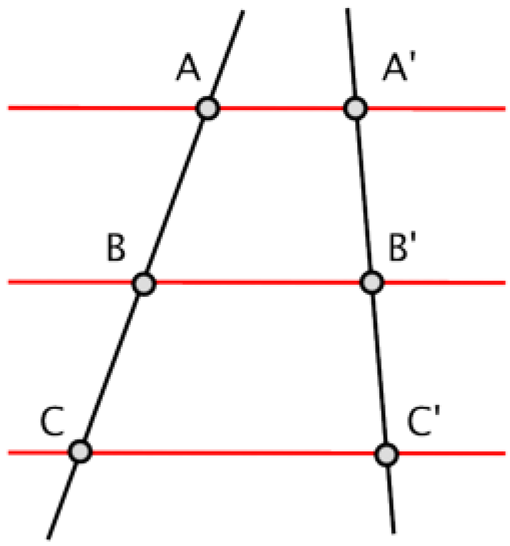


Figura 66: Proporção Teorema de Tales. Fonte: Brasil Escola.

Na figura acima, temos que o lado AB está para o lado BC na mesma proporção que o lado A'B' está para o lado B'C'.

14- Exercícios do Material do Aluno (30 min)

Neste momento os alunos terão um tempo para resolver os demais exercícios do material do aluno.

15- Esclarecimento de duvidas e encerramento (10 min)

Neste momento esclareceremos qualquer dúvida eu tenha ficado e encerraremos a aula.

Avaliação

A avaliação ocorrera através da observação da participação dos alunos e na resolução dos exercícios.

Referências

GIOVANNI, José Ruy. **Matemática: pensar & descobrir**. Nova edição. São Paulo: FDT 2005.

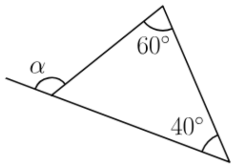
BARROSO, Juliane M. **Projeto Araribá: Matemática**. 1° ed. São Paulo: Moderna, 2006.

ANDRINI, Álvaro. Novo **Praticando Matemática**. São Paulo: Editora do Brasil, 2002.

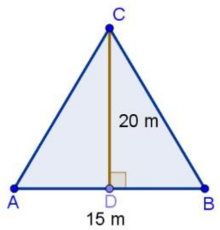
2.5.2.1. Material do aluno

MATERIAL DO ALUNO 9° ENCONTRO

1 - Determine o valor de α no triângulo abaixo.

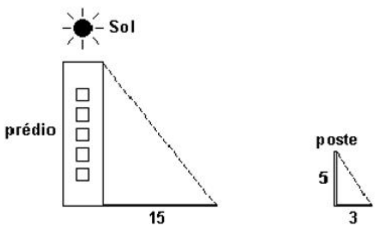


2 - O triângulo a seguir representa um terreno que será impermeabilizado para receber futuras obras. O metro quadrado do material impermeabilizante custa R$ 9,23. Calcule o valor que será gasto nesse procedimento.

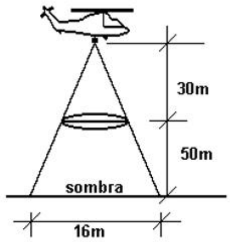


3 - Qual é a medida da base de um triângulo cuja área é 240 m^2 e cuja altura mede 120 m?

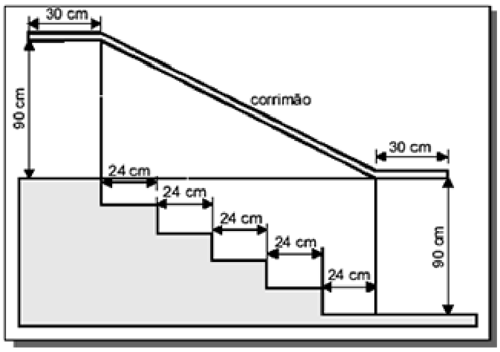
4 - (Unesp) A sombra de um prédio, em um terreno plano, em uma determinada hora do dia, mede 15 m. Nesse mesmo instante, próximo ao prédio, a sombra de um poste de altura 5 m mede 3 m. Qual a altura do prédio em metros?



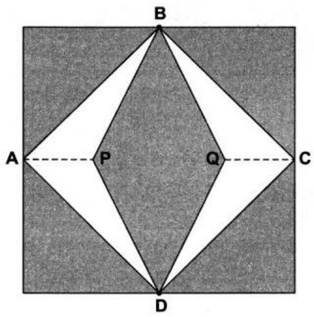
5 - (Unirio) Numa cidade do interior, à noite, surgiu um objeto voador não identificado, em forma de disco, que estacionou a 50 m do solo, aproximadamente. Um helicóptero do exército, situado a aproximadamente 30 m acima do objeto, iluminou-o com um holofote, conforme mostra a figura anterior. Sendo assim, pode-se afirmar que o raio do disco mede, em m, aproximadamente:



6 - Na figura abaixo, que representa o projeto de uma escada com 5 degraus de mesma altura, qual o comprimento total do corrimão?



7 - (ENEM 2012) Para decorar a fachada de um edifício, um arquiteto projetou a colocação de vitrais compostos de quadrados de lado medindo 1 m, conforme a figura a seguir.

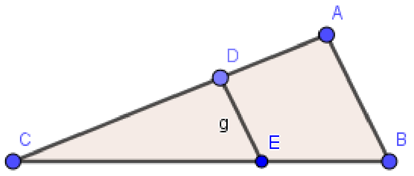


Nesta figura, os pontos A, B, C e D são pontos médios dos lados do quadrado e os seguimentos AP e QC medem 1/4 da medida do lado do quadrado. Para confeccionar um vitral, são usados dois tipos de materiais: um para a parte sombreada da figura, que custa R$ 30,00 o m², e outro para a parte mais clara (regiões ABPDA e BCDQB), que custa R$ 50,00 o m². De acordo com esses dados, qual é o custo dos materiais usados na fabricação de um vitral?

8 - Um copo tem o formato de prisma cuja base é um octógono regular. As arestas da base desse copo medem 2 centímetros e ele possui 15 centímetros de altura. Sabendo que o

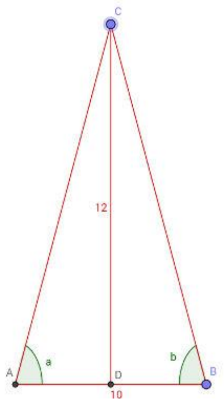
apótema desse octógono mede aproximadamente 2,5 cm, qual é o volume desse copo em centímetros cúbicos?

9 - (UNIMONTES-MG) Na figura, o segmento AB é paralelo ao segmento ED. Se CD=70 cm, DE= 45 cm e AB= 108 cm, então qual a medida do segmento AC?

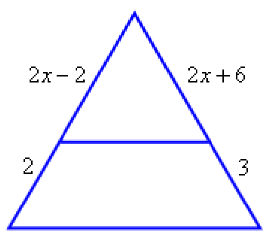


10 - Um triângulo ABC é retângulo em A e possui hipotenusa BC. Sabendo que as medidas dos lados AB e AC são iguais a √6 cm e √3 cm, respectivamente, determine a medida do lado BC.

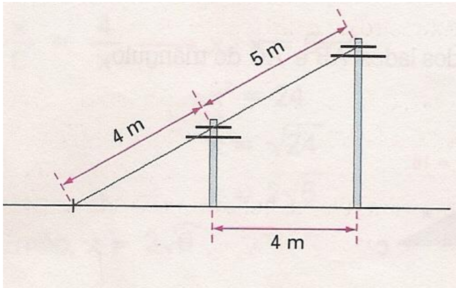
11 - Em um triângulo isósceles, ABC foi desenhada com altura relativa à base AB medindo 12 cm. Sabendo que a medida da base do triângulo é 10 cm, determine os lados CB e CA desse triângulo.



12 - No triângulo ABC a seguir, o segmento DE é paralelo ao segmento BC. Determine o valor de x aplicando a proporcionalidade entre segmentos paralelos cortados por segmentos transversais.



13 - Dois postes perpendiculares ao solo estão a uma distância de 4 m um do outro, e um fio bem esticado de 5 m liga seus topos, como mostra a figura abaixo. Prolongando esse fio até prende – lo no solo, são utilizados mais 4 m de fio. Determine a distância entre o ponto onde o fio foi preso ao solo e o poste mais próximo a ele.



2.5.2.2. Relato da aula

No dia 07 de julho de 2018 às 8 horas da manhã, iniciamos como o programado o 9° encontro do PROMAT. Estavam presentes 17 alunos, e neste encontro trabalhamos o conteúdo de triângulos e suas implicações.

Iniciamos a aula relembrando os pontos mais importantes da aula anterior e esclarecendo possíveis dúvidas dos alunos em relação a lista de exercício da última aula.

Em seguida, iniciamos o conteúdo programado para o encontro, apresentamos no quadro alguns conceitos a respeito de triângulos, relembramos alguns conceitos da aula de polígonos, onde havíamos trabalhado conceito de lados, vértices e ângulos.

Posteriormente, explicamos a eles como calcular os ângulos internos e externos de um triangulo qualquer, fizemos um exemplo no quadro para melhor entendimento. Após este momento fizemos a classificação dos triângulos quanto aos lados e aos ângulos, e fizemos uso novamente de um exemplo para que os alunos entendessem melhor o que havia sido dito. Pedimos então que eles resolvessem os exercícios 1 e 2 do material do aluno, deixamos alguns minutos para resolução e na sequencia fizemos a correção juntamente com eles no quadro. Uma das alunas veio até o quadro e apresentou a sua resolução, neste exercício o ângulo pedido resultou em uma dizima periódica, então explicamos aos alunos que se considerássemos as infinitas casas decimais de cada ângulo encontrado, a soma dos ângulos internos resultaria em 180° graus.

Na sequência retomamos com os alunos os conceitos de área e perímetro que já haviam sido trabalhados na aula anterior, e que foi de fácil entendimento dos alunos, então pedimos para que eles resolvessem os exercícios 3 e 4 do material do aluno.Ao passarmos pelos grupo percebemos que houve uma facilidade maior na resolução, e como nos exercícios anteriores deixamos um tempo para que eles resolvessem e em seguida os alunos vieram até o quadro apresentar sua resolução para os demais.

Continuamos a aula com a explicação sobre semelhança de triângulos, neste momento julgamos necessário explicar aos alunos a diferença entre semelhança e congruência pois poderia ser um grande causador de dúvida aos alunos durante a resolução das atividades.

Relembramos o primeiro encontro que tratava de razão e proporção, para explicar o conceito de semelhança dos segmentos, apresentamos os casos de semelhança, aparentemente eles estavam entendendo o que estava sendo explicado, neste momento da aula fizemos a dedução da formula da área, fizemos uma pausa para o intervalo e assim que retornamos pedimos para que eles resolvessem os exercícios 5 e 6 do material do aluno. Percebemos que houve uma certa facilidade de alguns grupos para resolver, deixamos um tempo para a resolução e em seguida corrigimos no quadro junto com os alunos. Explicamos a eles mais de um método de resolução, lembrando-os dos conteúdos trabalhados no 1°módulo.

Em seguida apresentamos aos alunos o teorema de Pitágoras, desenhamos no quadro um triangulo retângulo e quadrados inscritos sobre os catetos e hipotenusa, perguntamos então aos alunos o que eles entendiam quando viam aquela imagem, alguns se manifestaram e disseram a formula que haviam aprendido na escola. Então, explicamos que a soma da área dos quadrados inscritos nos catetos resulta na área do quadrado inscrito sobre a hipotenusa.

Logo após mostramos para eles as relações métricas de um triangulo retângulo, e pedimos para que fizessem o exercício 7 do material, notamos uma facilidade dos alunos na resolução, novamente fomos ao quadro fazer a correção, uma aluna se propôs a resolver, enquanto ela anotava nós explicamos as possíveis dúvidas que eles tiveram na resolução.

A partir disto apresentamos aos alunos o teorema de Tales e explicamos os principais pontos, e para melhor compreensão resolvemos um exemplo juntamente com os alunos. Sequêncialmente pedimos para que eles resolvessem o exercício 10 do material do aluno, e em seguida fizemos a resolução e o esclarecimento das dúvidas referentes ao exercício.

Neste dia o conteúdo a ser estudado acabou um pouco cedo e tivemos um momento muito importante que foi de resolução de exercícios, esse tempo serviu para o esclarecimento de alguns conceitos e para colocar em prática o que foi aprendido nesta aula.

Durante a correção dos exercícios os alunos vieram até o quadro apresentar as suas resoluções. Durante a aula alguns alunos relataram que era a 1ª vez que eles estavam tendo contato com este conteúdo, mesmo com suas dificuldades, de modo geral todos participaram e demonstraram estar entendendo o que estávamos explicando, quando tinham dúvidas perguntaram e ajudaram a todo o momento principalmente durante as correções.

Finalizamos o 9° encontro do Promat e informamos os conteúdos que viriam a ser trabalhados no 10° e último encontro do 3° módulo, nos despedimos e encerramos a aula.

2.5.3. Plano de aula do dia 14/07/2018

10º ENCONTRO

Público-Alvo:

Alunos do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

Objetivo Geral:

Reconhecer o círculo e a circunferência, conhecer e identificar os elementos.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com círculo e circunferência, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Reconhecer a diferença entre círculo e circunferência;
- Conhecer os elementos de uma circunferência;
- Reconhecer uma coroa circular;
- Calcular a área de um círculo e o perímetro de uma circunferência;
- Calcular o volume de sólidos de base circular;

Conteúdo: Circulo e Circunferência.

Recursos Didáticos: Quadro, giz, lista de exercícios, barbante, círculo de setores, solidos geometricos.

1- Revisão das últimas aulas e introdução do conteúdo (5 min)

Iniciaremos a aula questionando os alunos sobre o último encontro, buscando esclarecer eventuais dúvidas e também questionando se há alguma dúvida em relação a lista de exercício e se necessitam da resolução do mesmo.

2- Introdução sobre círculo e circunferência (5 min)

Neste tópico abordaremos a diferença entre círculo e circunferência e posteriormente explicaremos os elementos destes.

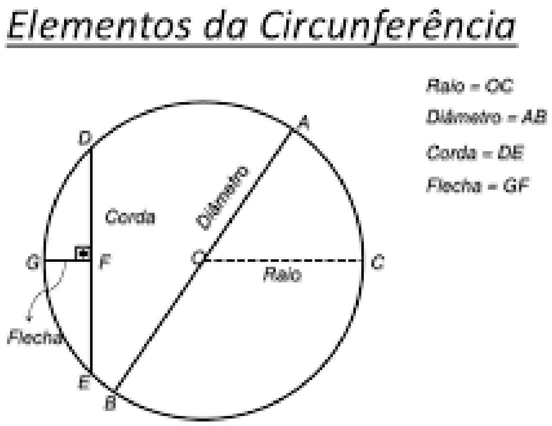


Figura 67: Elementos da circunferência. Fonte: Vestibular SC.

- Perímetro: é o comprimento da circunferência.
- Cordas: São segmentos de retas que ligam dois pontos da circunferência.
- Raio (r): é o segmento de reta do centro da circunferência até um ponto qualquer.
- Diâmetro: é duas vezes o raio (2*r), ou seja é a maior corda que obtemos em uma circunferência.

3- Experimento de Dedução do número π (20 min)

Daremos aos alunos vários objetos que tem uma forma circular e pediremos que meçam seu comprimento externo (perímetro) e seu diâmetro com o auxílio de um barbante, e pediremos também que anotem as medidas obtidas em uma tabela. Feito isso, os alunos devem encontrar a razão da medida do perímetro pela medida do diâmetro e analisar os resultados obtidos.

Os alunos terão de tabelar todas as medidas encontradas e, posteriormente, compartilharem os resultados com a sala inteira.

O número π será utilizado na expressão do comprimento da circunferência.

Expressão do comprimento da circunferência:

$$C = 2\pi r$$

Sendo C o comprimento da circunferência e r o raio da circunferência.

4- Exercício de Fixação (15 min)

Pediremos aos alunos que resolvam os exercícios 1 e 2 do material do aluno, para posterior correção.

5- Experimento de Dedução da Área do Círculo (20 min)

Daremos aos alunos um círculo, que se divide em setores circulares. O objetivo aqui é, com os setores circulares, eles construirem uma nova figura, com o intuito de deduzirem uma expressão em que pode se encontrar a área do círculo.

Posteriormente, discutiremos os resultados.

Expressão da área do círculo:

$$A = \pi r^2$$

Onde r é o raio do círculo.

6- Exercício de Fixação (20 min)

Pediremos aos alunos que resolvam os exercícios 3 e 4 do material do aluno, para posterior correção.

7- Coroa Circular (5 min)

Uma coroa circular é formada por dois círculos concêntricos, um maior e outro menor. Sua área é dada pela área do circulo maior menos a área do círculo menor.

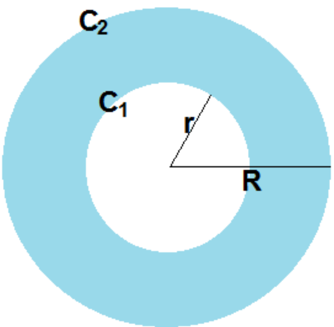


Figura 68: Coroa circular. Fonte: Brasil Escola.

A área dessa coroa circular é dada por:

$$Aco = AC2 - AC1$$

8- Exercício de Fixação (20 min)

Pediremos aos alunos que resolvam o exercício 5 e 6 do material do aluno, para posterior correção.

9- Sólidos (Não Poliedros) (15 min)

-Área da Superfície do Cilindro

Mostraremos o cilindro planificado para os alunos e, inicialmente, os questionaremos qual a área da superfície desse sólido. A ideia é que eles cheguem na expressão

CILINDRO

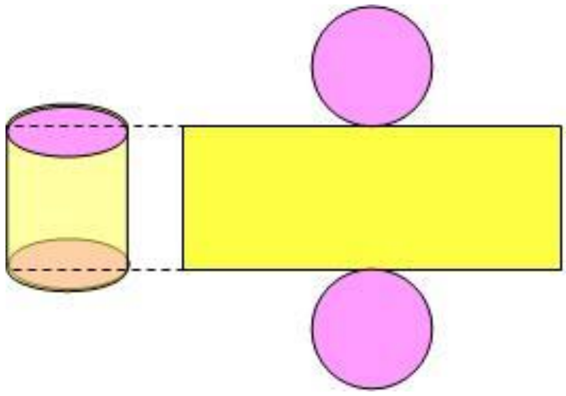
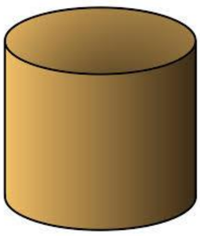


Figura 69: Cilindro planificado. Fonte: Brasil Escola.

-Volume

SÓLIDO	VOLUME
	$V=(4/3)\pi r^3$
	$V= (\pi r^2).h$

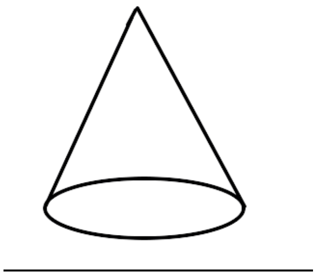
	$V = (1/3)\pi r^2.h$

Tabela 7: Volume dos sólidos

10- <u>Exercício de fixação (15) min)</u>

Pediremos aos alunos que resolvam os exercícios 7 e 8 do material do aluno, para posterior correção.

11- <u>Exercício do material do aluno</u>

Os exercícios restantes serão deixados para que os alunos resolvam posteriormente.

12- <u>Encerramento da aula (10 min)</u>

Encerraremos a aula comunicando-os sobre alguns pontos, como certificado do curso e como adquirí-lo e ainda também sobre o PROMAT do segundo semestre, onde aqueles que tiverem interesse deveriam proceder com novas inscrições.

<u>Avaliação:</u> A avaliação se dará por meio da observação no decorrer da aula, nos atentando ao desenvolvimento dos alunos durante as atividades propostas.

<u>Referências:</u>

GIOVANNI, José Ruy. **Matemática: pensar & descobrir**. Nova edição. São Paulo: FDT 2005.

BARROSO, Juliane M. **Projeto Araribá: Matemática**. 1° ed. São Paulo: Moderna, 2006.

ANDRINI, Álvaro. Novo **Praticando Matemática**. São Paulo: Editora do Brasil, 2002.

2.5.3.1. Material do aluno

MATERIAL DO ALUNO 10° ENCONTRO

1 - Um atleta parte de um ponto A de uma pista de atletismo circular e dá uma volta completa. Sabendo que o raio dessa pista tem 50m de comprimento, qual a distância, em metros, percorrida pelo atleta? (Use $\pi = 3,14$)

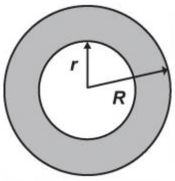
2 - Determine a medida do raio de uma praça circular que possui 9420 m de comprimento (Use $\pi = 3,14$.).

3 - Determinar o diâmetro e a área de um círculo (respectivamente), cujo perímetro mede 36π cm.

4 - Considerando que uma pizza tradicional grande possui 35 cm de raio e uma pizza tradicional pequena apresenta 25 cm, determine a diferença entre a área das duas pizzas.

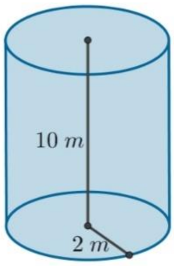
5 - Uma coroa circular é a região limitada por dois círculos concêntricos com raios de medidas distintas. Qual é a área de uma coroa circular cujos raios medem 10 cm e 20 cm?

6 - (ENEM-PPL) No projeto de arborização de uma praça está prevista a construção de um canteiro circular. Esse canteiro será constituído de uma área central e de uma faixa circular ao seu redor, conforme ilustra a figura.



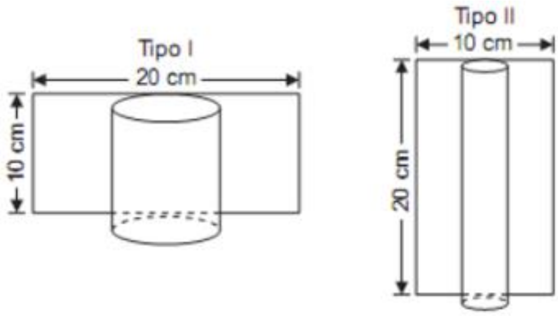
Deseja-se que a área central seja igual à área da faixa circular sombreada. Qual é a relação entre os raios do canteiro (R) e da área central (r)?

7 - Um reservatório em formato cilíndrico possui raio igual a 2 metros e sua altura é de 10 metros, como mostra a imagem a seguir. Qual é o volume desse reservatório? (considere $\pi = 3,14$).



8 - (Enem) Uma artesã confecciona dois diferentes tipos de vela ornamental a partir de moldes feitos com cartões de papel retangulares de 20 m x 10 cm (conforme ilustram as figuras

abaixo). Unindo dois lados opostos do cartão, de duas maneiras, a artesã forma cilindros e, em seguida, os preenche completamente com parafina.

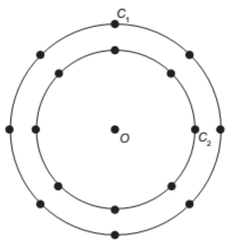


Supondo que o custo da vela seja diretamente proporcional ao volume da parafina empregado, qual será a relação entre o custo da vela do tipo I e o custo da vela do tipo II?

9 - (UEM-PR) Uma pista de atletismo tem a forma circular e seu diâmetro mede 80 m. Um atleta treinando nessa pista deseja correr 10 km diariamente. Determine o número mínimo de voltas completas que ele deve dar nessa pista a cada dia.

10-(UESPI) Um trabalhador gasta 3 horas para limpar um terreno circular de 6 metros de raio. Se o terreno tivesse 12 metros de raio, quanto tempo o trabalhador gastaria para limpar tal terreno?

11 - A figura é uma representação simplificada do carrossel de um parque de diversões, visto de cima. Nessa representação, os cavalos estão identificados pelos pontos escuros, e ocupam circunferências de raios 3 m e 4 m, respectivamente, ambas centradas no ponto O. Em cada sessão de funcionamento, o carrossel efetua 10 voltas.



Quantos metros uma criança sentada no cavalo C_1 percorrerá a mais do que uma criança no cavalo C_2, em uma sessão? Use 3,0 como aproximação para π.

2.5.3.2. Relato da aula

No dia 14 de julho de 2018 sucedeu o 10° encontro do Promat, com início às 8 horas da manhã. Estavam presentes neste dia 15 alunos. Nesta aula trabalhamos geometria (Círculo e Circunferência).

Iniciamos a aula com a revisão do conteúdo do encontro anterior: Triângulos. Neste momento questionamos os alunos sobre possíveis duvidas a respeito da lista de exercícios e sobre o conteúdo que havia sido apresentado até o momento. Inicialmente questionamos os alunos se eles saberiam diferenciar círculo de circunferência, alguns falaram o conceito corretamente, mas a grande maioria não sabia desta diferença, após eles dizerem suas opiniões, fizemos a explicação da diferença existente, e mostramos aos alunos os elementos da circunferência. Explicamos que existe perímetro na circunferência, pois eles tinham uma ideia de que o perímetro existe apenas em figuras formadas por segmento de retas, então apresentamos que o comprimento da circunferência é denotado também como perímetro, para surpresa de alguns.

Em seguida, distribuímos aos alunos vários objetos que tem formato circular e pedimos para que eles medissem o comprimento externo (ou seja, o perímetro) e o diâmetro. Pedimos para que eles anotassem as medidas encontradas em uma tabela e após realizarem esse experimento, pedimos para que viessem até o quadro e apresentassem os seus resultados para os demais colegas. Feito isso, foi solicitado que encontrassem a razão entre a medida do comprimento pela medida do diâmetro de cada um dos objetos circulares que entregamos a eles e novamente viessem ao quadro anotar os seus resultados, seguidamente perguntamos aos alunos se eles viam naqueles resultados algum tipo de relação, e eles nos disseram que todos os resultados das razões eram próximos de 3,14, então explicamos aos alunos que este é número π, e será utilizado na expressão do comprimento da circunferência.

Mostramos aos alunos o caminho inverso ao que eles haviam realizado anteriormente, eles viram que se dividirmos o perímetro pelo diâmetro encontramos como resultado π, e se eles fizessem o inverso que é multiplicar π pelo diâmetro eles conseguem encontrar o perímetro da circunferência, percebemos que os alunos tiveram facilidade de compreender este conteúdo. Então solicitamos que eles fizessem os exercícios 1 e 2 do material do aluno, deixamos um tempo para que eles fizessem, em seguida corrigimos com eles no quadro, percebemos uma facilidade por parte dos alunos para resolver os exercícios.

Posteriormente, fizemos com os alunos outro experimento para que eles encontrem a fórmula da área, para isso, distribuímos aos alunos um círculo, que se divide em setores circulares, sendo metade pintado na cor azul e a outra parte pintado em vermelho, tendo como objetivo que eles construíssem uma nova figura e conseuissem deduzir uma expressão para encontrar a área do círculo. A princípio eles sentiram dificuldade para conseguir manipular e até mesmo para deduzir uma possível fórmula, então passamos nos grupos auxiliando-os para que pudessem construir um retângulo, que eles já sabiam como calcular a área, e a partir daí auxiliando-os a identificar que a largura desse retângulo era equivalente ao raio do circulo, e que o comprimento era equivalente a metade do perímetro da circunferência. como eles já sabiam que a área de um retângulo é calculada através do produto entre comprimento e largura, então eles foram substituindo na fórmula do retângulo as informações obtidas e assim foram deduzindo como calcular a área do círculo ($A=\pi r^2$). Logo após, pedimos para que os alunos resolvessem os exercícios 3 e 4 do material do aluno. Foi dado a eles um tempo para resolução e em seguida corrigimos no quadro, não percebemos nos alunos grandes dificuldades na resolução dos exercicios.

Em sequencia, explicamos aos alunos o conceito sobre coroa circular (ou anel) que é uma região limitada por dois círculos concêntricos, neste momento questionamos os alunos o que significava concêntrico. Um dos alunos disse que concêntrico significava origem no mesmo centro, então explicamos aos alunos o que significava esse conceito, complementando o que o estudante nos tinha apontado e demos continuidade à aula.

Neste momento comentamos com os alunos que denotávamos por R o raio da circunferência externa e por r o raio da circunferência interna, e que a área da coroa é dada pela diferença entre a área do círculo externo e a área do círculo interno, falamos ainda que a ideia era semelhante ao exercício 4 que eles haviam feito anteriormente. Pedimos então para que eles resolvessem os exercícios 5 e 6 do material, após o tempo dado para resolução, fizemos a correção no quadro, percebemos que eles tiveram uma dificuldade em resolver o exercício 6, as dúvidas dos estudantes foram esclarecidas no momento da correção onde eles conseguiram compreender o que estava sendo pedido.

Após corrigir os exercícios, mostramos aos alunos a figura de um cilindro planificado e, questionamos a eles qual a área da superfície do sólido apresentado, logo explicamos a eles que é possível encontrar a área fazendo a soma das as áreas das figuras que formam o cilindro, neste caso calcular a área do retângulo e somar com a área dos círculos (bases), em seguida apresentamos alguns sólidos e como era possível calcular o volume deles. Resolvemos com eles os exercícios 7 e 8 do material do aluno e assim finalizamos o último encontro.

Nosso último encontro do primeiro semestre do Promat foi um pouco mais curto por conta da nossa confraternização, encerramos a aula comunicando-os sobre alguns pontos, explicamos como adquirir o certificado do curso, falamos também sobre o Promat do segundo semestre, onde os alunos deveriam fazer novas inscrições, para poder continuar no projeto, por fim nos despedimos de nossos alunos, agradecendo pela ajuda que eles nos deram durante o Promat, ressaltando a importância deles na nossa formação. Desta forma encerramos o primeiro semestre e o projeto Promat.

2.6. CONSIDERAÇÕES ACERCA DO PROMAT

Com o fim do primeiro semestre, no qual realizamos o estágio no projeto Promat, podemos refletir sobre as experiências vivenciadas até aqui e sobre nosso crescimento em grupo desde o começo do projeto neste semestre.

Acreditamos que, como grupo, apesar de alguns conflitos internos, conseguimos crescer exponencialmente e conseguimos transmitir o conhecimento que queríamos aos alunos. Estes, foram persistentes vindo a cada sábado pela manhã, seja tendo aula tradicional (apenas ouvindo e fazendo exercícos) ou conhecendo novos ares, como jogos e materiais manipuláveis. Conforme as observações que fizemos, os alunos saíram realizados com o que conseguiram absorver das aulas, mesmo que por vezes, alguns conceitos que nós apresentávamos eram desconhecidos. Acreditamos que conseguimos mediar essa questão, fazendo uma aula introdutória para alguns alunos ao mesmo tempo que outros já conhecem o assunto.

A respeito das metodologias utilizadas em sala de aula, tivemos um bom retorno mesmo trabalhando com metodologias diferentes. Por vezes trabalhamos com problemas geradores, atividades praticas para introdução ou para recapitulação do conteúdo e os alunos conseguiram chegar ao objetivo traçado por nós, sempre mostrando entusiasmo em realizar as atividades, fato esse que nos animava a seguir em frente e preparar novas abordagens para os encontros decorrentes. Durante o projeto do Promat, utilizamos também aulas tradicionais, onde optamos por dar explicações no quadro e levar o conhecimento aos alunos através de exercícios e questionamentos, essa ideia também funcionou embora possamos ter deixado a desejar quando erros foram cometidos e tivemos dificuldade na hora de apresentar o assunto.

Tivemos alguns fatores que acabaram atrapalhando as aulas durante o projeto, alunos que precisavam sair antes para pegar ônibus acarretando em grande perca de aula, e dificuldades com conceitos básicos de matemática, mas este último acreditamos que não seja exclusivo de nosso grupo. Buscamos ao máximo contornar estas situações e elas nos serviram como uma ideia de todos os problemas que temos hoje no ensino básico e médio, esse fato nos aproximou ainda mais da realidade na carreira docente. A convivência em grupo foi outro fator crucial, pois tivemos problemas no início quanto a divisão de tarefas, fator que fez diferença durante a execução das aulas, os problemas diminuíram com o passar do tempo, cremos que ao final nos saímos bem, e superamos as dificuldades iniciais.

Boas lições foram tiradas da oportunidade que nos foi dada, acreditamos que essa experiência foi de grande valia a todos, dando uma nova perspectiva sobre o que representa ser professor, ainda tivemos oportunidade de pensar e analisar se é realmente isso que queremos para as nossas vidas.

Por fim, de um modo geral, acreditamos que cumprimos nossos objetivos e deveres e, em relação ao Promat, desejamos boas energias aos alunos e estagiários para o segundo semestre.